Astrofysik

Ugeseddel 6 2007

9/5 giver jeg en indledning til kosmologi med en gennemgang af *Fundamental Astronomy*, Kapitel 19, og det supplerende materiale på denne ugeseddel. 11/5 behandler jeg målinger af kosmologiske parametre, som behandlet i Ryden, Kapitel 7.

Den 16. maj gennemgår jeg observationer og fortolkning af den kosmiske mikrobølgebaggrundsstråling, behandlet i Ryden, Kapitel 9. Jeg foreslår at vi aflyser forelæsningen 18. maj (dagen efter Kristi Himmelfartsdag).

Supplerende materiale:

Beskrivelsen af kosmologi i *Fundamental Astronomy* er lovlig kortfattet, givet feltets voldsomme udvikling i de seneste år. En glimrende introduktion til kosmologi er givet i Barbara Ryden: *Introduction to Cosmology* (2003; Addison Wesley). Jeg vil derfor bruge udvalgte dele af denne bog; det kan varmt anbefales at anskaffe den.

På de næste sider af denne ugeseddel giver jeg desuden nogle noter, der udbygger behandlingen af emnerne behandlet i *Fundamental Astronomy* og etablerer kontakten til notationen i Ryden.

Ved øvelserne 15. og 16. maj gennemgår vi

– *Opgavesamling til A4 Astrofysik I*, Sommereksamen 1987, opgave 1. Antag endvidere at $L \sim M^4$ for stjerner i ustabilitetsbæltet, og vis at dette giver en relation på formen

$$M_{\rm bol} = \text{konstant} + \alpha \log \Pi \ ,$$

hvor $M_{\rm bol}$ er den bolometriske størrelsesklasse. Find α og sammenlign med *Fundamental Astronomy*, Fig. 13.4 (vi negligerer variationen i den bolometriske korrektion).

– *Eksamensopgaver i Astrofysik*, Summer 2006, opgave 1.

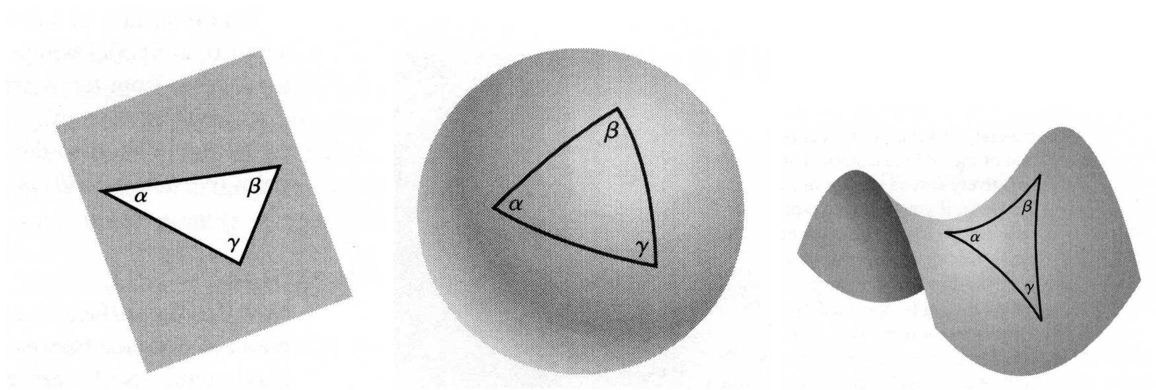
– *Opgavesamling til A4 Astrofysik I*, opgave 46.

– *Eksamensopgaver i Astrofysik*, Summer 2005, opgave 2.

9. maj 2007 Jørgen Christensen-Dalsgaard

Supplerende noter til kosmologi

Topologi og metrik



Et fladt to-dimensionalt rum, samt to-dimensionelle rum med positiv og negativ krumning.

Som diskuteret i *Fundamental Astronomy* er rummets geometri af stor betydning i kosmologien. Selv om vi der opererer med et fire-dimensionelt rum-tids kontinuum er det nemmere at illustrere geometrien i to dimensioner, som gjort ovenfor. Et mål for en flades geometri kan fås ud fra vinkelsummen i de illustrerede trekanter. I det plane tilfælde gælder selvfølgelig at

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \ . \tag{1}$$

På en kugleoverflade har man at

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A/R^2 \ , \tag{2}$$

hvor A er trekantens areal og R er kuglens radius. På en mere kompliceret overflade med positiv krumning gælder en tilsvarende relation, hvor R så beskriver den lokale krumning af fladen i det pågældende område. Bemærk at i grænsen $R \to \infty$ (eller $A \to 0$) får vi igen ligning (1), som forventeligt. På en overflade med negativ krumning, som sadlen i figuren,* gælder tilsvarende at

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - A/R^2 \ , \tag{3}$$

der igen definerer en lokal krumningsradius.

Geometrien på en overflade er defineret ved *metrikken*, dvs. afstandsmålet på overfladen (se også Appendix B i *Fundamental Astronomy*). I et 'almindeligt' fladt (eller Euklidisk) rum beskrevet i kartesiske koordinater (x, y, z) er et lille afstandselement ds givet ved

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \ . \tag{4}$$

Bruges i stedet sfærisk polære koordinater (r, θ, ϕ), hvor θ er vinklen fra polaksen,† er

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2) = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \ , \tag{5}$$

---

* Bemærk at overfladen til højre på Fig. 19.10 i *Fundamental Astronomy* ikke har meget med en saddel at gøre: den har negativ krumning i en retning og positiv krumning i en anden!

† *Fundamental Astronomy* bruger i stedet θ for breddegraden, og har derfor cos i stedet for sin i deres tilsvarende ligning i Appendix B; den her brugte konvention er den gængse, og er også brugt af Ryden.

hvor

$$\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2 \tag{6}$$

er et rumvinkelement.

I et mere generelt, krumt, rum erstattes dette udtryk med

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + S_\kappa(r)^2 \mathrm{d}\Omega^2 \ , \tag{7}$$

hvor $\kappa = 1, 0$ eller -1 angiver om rummet har respektivt positiv krumning, er fladt eller har negativ krumning. S_κ afhænger af den lokale krumningsradius R:

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R\sin(r/R) & \text{for } \kappa = 1 \\ r & \text{for } \kappa = 0 \\ R\sinh(r/R) & \text{for } \kappa = -1 \ . \end{cases} \tag{8}$$

Bemærk at for $r \ll R$ er $S_\kappa(r) \simeq r$ i alle tilfælde; rummet er altså lokalt fladt.

En alternativ formulering af sammen metrik fås ved at bruge $x = S_\kappa(r)$ som radial koordinat. Så kan ligning (7) skrives

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2}{1 - \kappa x^2/R^2} + x^2 \mathrm{d}\Omega^2 \ . \tag{9}$$

(Denne notation er brugt i *Fundamental Astronomy*, ligning (19.4), med r i stedet for x.)

I speciel relativitetsteori generaliseres den tredimensionelle metrik i det fire-dimensionelle rum-tids 'rum' til, f.eks.,

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \ , \tag{10}$$

hvor c er lyshastigheden og t er tiden; her er rummet stadig fladt. Bemærk at lys udbreder sig langs en såkaldt nul-geodæt, med $\mathrm{d}s = 0$. I det krumme tilfælde erstattes denne metrik af den såkaldte *Robertson-Walker* metrik. I det generelle tilfælde, hvor rummets skala er tidsafhængig, og hvor vi antager homogenitet og isotropi, kan den skrives

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \left[\mathrm{d}r^2 + S_\kappa(r)^2\mathrm{d}\Omega^2\right] \ , \tag{11}$$

hvor $a(t)$ er skalafaktoren, der angiver hvor meget de rumlige afstande har ændret sig relativt til en referencetid. Normalt bruges den nuværende tid $t = t_0$ som reference, $a(t_0) = 1$. Så svarer $a(t)$ i *Fundamental Astronomy*'s notation til $R(t)/R_0$.

Afstand og Hubbles lov

For at finde afstanden mellem to punkter i rummet (f.eks. en fjern galakse og en iagtager på Jorden) til et givet tidspunkt t kan vi lægge koordinatsystemet med $r = 0$ i det ene punkt, og samme θ og ϕ for de to punkter. Så er afstanden (*proper distance* i Ryden) givet ved

$$d_p(t) = \int \mathrm{d}s = a(t) \int_0^r \mathrm{d}r = a(t) r \ . \tag{12}$$

Heraf følger også at ændringen i afstanden per tidsenhed (dvs. hastigheden) er givet ved

$$\frac{\mathrm{d}d_p(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{d}_p(t) = \dot{a} r = \frac{\dot{a}}{a} d_p(t) \ . \tag{13}$$

Specielt på det nuværende tidspunkt har vi hastigheden

$$v_p(t_0) = H_0 d_p(t_0) \ , \tag{14}$$

med $H_0 = (\dot{a}/a)_{t=t_0}$, der udtrykker Hubble's lov.

Et alternativt, og meget nyttigt, udtryk for afstanden får vi ved at betragte en foton udsendt til tiden $t = t_e$ fra den fjerne galakse og observeret til tiden $t = t_0$. For en foton gælder at $\mathrm{d}s = 0$, dvs. at $c\mathrm{d}t = a(t)\mathrm{d}r$. Derfor har vi at

$$d_p(t_0) = \int_0^r \mathrm{d}r = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \ . \tag{15}$$

Ud fra analyse af denne relation kan man også vise at bølgelængden af lys skalerer som $a(t)$: hvis bølgelængden er λ_e ved emissionstidspunktet og λ_0 til $t = t_0$ er

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)} \ ; \tag{16}$$

således er, som nævnt i *Fundamental Astronomy*, rødforskydningen z for dette objekt er relateret til $a(t_e)$ ved

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z = \frac{1}{a(t_e)} \ . \tag{17}$$

En speciel afstand baseret på ligning (15) får vi ved at betragte lys udsendt til $t = 0$:

$$d_{\mathrm{hor}}(t_0) = c \int_0^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \ , \tag{18}$$

med $a(t_0) = 1$. Lys fra objekter længere væk har åbenbart ikke haft tid til at nå os i Universets levetid. Denne afstand definerer den øjeblikkelige horizont, uden for hvilken der ikke har kunnet været nogen kommunikation og dermed vekselvirkning.

Friedmann ligningerne

Vi får brug for en lidt mere generel form for Friedmann ligningerne end givet i *Fundamental Astronomy*. Som i udledningen der betragter vi en Newtonsk approksimation, men vi erstatter i ligning (19.30) $R_0^3 \rho_0$ med $R^3 \rho$, ifølge ligning (19.26). Endvidere indfører vi ikke Ω umiddelbart. Endelig bruger vi $a = R(t)/R_0$. Resultatet er, at ligning (19.29) kan skrives

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda + \frac{C}{a^2} \ , \tag{19}$$

hvor C er en samlet integrationskonstant. Som argumenteret i *Fundamental Astronomy* fås den korrekte relativistiske form ved at sætte $C = -\kappa c^2/R_0^2$, hvor $\kappa = (-1, 0, 1)$ er krumningskonstanten, og R_0 nu er krumningsradius til $t = t_0$. Altså får vi

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} \ . \tag{20}$$

Det følger af Einsteins ækvivalens mellem masse og energi at energitætheden bidrager til tyngdefeltet. Således fås den korrekte form ved at erstatte ρ med ϵ/c^2, hvor ϵ er energitætheden. For almindeligt stof inkluderer dette hvilemassenenergien, således at vi genfinder et bidrag ρ fra stoffet, hvis dette bevæger sig med hastigheder meget mindre end lyshastigheden. Formelt kan bidraget fra Λ også inkluderes ved at indføre et bidrag

$$\epsilon_\Lambda = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda \tag{21}$$

til ϵ. Dette giver endelig Friedmann ligningen på formen

$$H(t)^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} \ , \tag{22}$$

hvor vi, i analogi med ligning (14), indførte den øjeblikkelige Hubble parameter $H = \dot{a}/a$.

Af ligning (22) følger at fortegnet af κ er defineret af fortegnet af $\epsilon - \epsilon_c$, hvor den kritiske energitæthed er givet ved

$$\epsilon_c = \frac{3c^2}{8\pi G}H(t)^2 \ . \tag{23}$$

Ofte udtrykker man energitætheden relativt til ϵ_c, som $\Omega(t) = \epsilon/\epsilon_c$. Som også diskuteret i *Fundamental Astronomy* har rummet positiv krumning, er fladt eller har negativ krumning hvis $\Omega > 1$, $\Omega = 1$ eller $\Omega < 1$. Udtrykt ved Ω kan ligning (22) skrives

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \ . \tag{24}$$

Her er det klart at højresidens fortegn er konstant i tiden, og dermed gælder også at Ω enten er < 1, 0 eller > 1 til alle tider. Det relevante tilfælde kan i princippet afgøres ud fra de nuværende værdier, der giver

$$1 - \Omega_0 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2} \ . \tag{25}$$

Den kritiske tæthed i det nuværende Univers kan findes ud fra den målte værdi for Hubblekonstanten, $H_0 = 70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$; det giver

$$\epsilon_{c,0} = \frac{3c^2}{8\pi G}H_0^2 = 8.3 \times 10^{-10}\,\mathrm{J\,m^{-3}} = 5200\,\mathrm{MeV\,m^{-3}} \ . \tag{26}$$

Udtrykt ved den tilsvarende massetæthed $\rho_{c,0} = \epsilon_{c,0}/c^2$ fås

$$\rho_{c,0} = 9.2 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg\,m^{-3}} = 1.4 \times 10^{11} M_\odot\,\mathrm{Mpc^{-3}} \ . \tag{27}$$

Vi får også brug for energiligningen for Universet, under antagelse af en adiabatisk proces, uden energiudveksling. Udgangspunktet er ganske simpelt termodynamikkens første hovedsætning for et område $V(t)$, på formen

$$0 = \dot{Q} = \dot{E} + P\dot{V} \ , \tag{28}$$

hvor $\dot{Q}$ er hastigheden af varmetilførsel (= 0 for en adiabatisk proces), E er energien i området og P er trykket. Volumen V for et givet område, der udvikler sig med skalafaktoren, er proportionalt med $a(t)^3$, så

$$\dot{V} = 3\frac{\dot{a}}{a}V \ . \tag{29}$$

Endvidere har vi at $E = \epsilon V$, og derfor at $\dot{E} = \dot{\epsilon} V + \epsilon \dot{V}$. Alt i alt får vi fra ligning (28) at

$$V \left[\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) \right] = 0 \ ,$$

eller

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \ . \tag{30}$$

Denne ligning kan bruges til at udlede en ligning for Universets acceleration, som vi siden får brug for. Ved at gange ligning (22) med a^2 og differentiere får vi

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\dot{\epsilon}a^2 + 2\epsilon a\dot{a}) \ .$$

Ved at dividere med $2a\dot{a}$ og bruge, ud fra ligning (30), at

$$\dot{\epsilon}\frac{a}{\dot{a}} = -3(\epsilon + P) \ ,$$

får vi endelig accelerationsligningen

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) \tag{31}$$

(Ryden, ligning 4.44).

For at komme videre har vi brug for relationer mellem ϵ og P for de forskellige bestanddele af Universet. Generelt er det bekvemt at skrive sådanne relationer på formen

$$P = w\epsilon \ . \tag{32}$$

For almindeligt stof (der bevæger sig ikke-relativistisk) er trykket af samme størrelsesorden som bevægelsesenergien og dermed langt mindre end hvilemassenergien. Altså er den tilsvarende værdi af w, w_m, meget mindre end 1. For stråling (eller andre ekstremt relativistiske partikler) ved vi at $w = w_{\rm rel} = 1/3$. Endelig kan man vise at for en simpel konstant kosmologisk konstant (hvor også ϵ_Λ er konstant) er $w = w_\Lambda = -1$. I dette tilfælde har vi altså et negativt tryk (eller en spænding), der bidrager til at *accelerere* Universets udvidelse. Bemærk at dette gælder uanset at ϵ_Λ giver et positivt bidrag til den effektive massetæhed og dermed til en opbremsning af Universet; men i ligning (31) dominerer bidraget fra P_Λ.

Hvis de forskellige bidrag til energitætheden ikke vekselvirker, gælder ligning (30) for energitætheden ϵ_w for hver komponent separat. Bruges også ligning (32) har vi at

$$\frac{\dot{\epsilon}_w}{\epsilon_w} = -3(1 + w)\frac{\dot{a}}{a} \ ,$$

eller

$$\epsilon_w = \epsilon_{w,0} a(t)^{-3(1+w)} \ , \tag{33}$$

hvor vi går ud fra at w er konstant. For almindeligt stof, med $w \simeq 0$, har vi derfor at $\epsilon = \epsilon_m = \epsilon_{m,0} a(t)^{-3}$. Det følger også af massebevarelse i et givet område, og af at volumen af området ændrer sig proportionalt med $a(t)^3$. Tilsvarende har vi for stråling, med $w = 1/3$, at $\epsilon = \epsilon_r = \epsilon_{r,0} a(t)^{-4}$. Et simpelt argument for denne relation fås ved at benytte at den gennemsnitlige energi af en foton er proportional med $\lambda^{-1} \propto a(t)^{-1}$ (se ligning 16), og at antalstætheden af fotoner varierer som $a(t)^{-3}$. Endelig har vi, for bidraget fra den kosmologiske konstant, at $w = -1$ og dermed at ϵ_Λ er konstant, som allerede anført.

Som vi senere skal se tyder meget på at Universet er fladt, med $\Omega_0 = 1$ og dermed $\kappa = 0$. *Hvis* en komponent med et givet w dominerer kan vi derfor skrive Friedmann ligningen som

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon_{c,0}a^{-3(1+w)} = H_0^2 a^{-3(1+w)} , \tag{34}$$

eller

$$\int_0^a a^{(1+3w)/2}\mathrm{d}a = H_0 \int_0^t \mathrm{d}t = H_0 t ,$$

og dermed

$$a(t) = \left[\frac{3H_0(1+w)t}{2}\right]^{2/(3+3w)} . \tag{35}$$

Endvidere er Universets nuværende alder t_0 (med $a(t_0) = 1$)

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)}H_0^{-1} . \tag{36}$$

Dette generaliserer udledningen af *Fundamental Astronomy*, ligning (19.34). I et Univers domineret af almindeligt stof, med $w \simeq 0$, har vi derfor

$$a(t) = \left(\frac{3H_0 t}{2}\right)^{2/3} , \qquad t_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0} . \tag{37}$$

I et Univers domineret af stråling, med $w = 1/3$, har vi tilsvarende

$$a(t) = (2H_0 t)^{1/2} , \qquad t_0 = \frac{1}{2H_0} . \tag{38}$$

Som reference bruger Ryden et såkaldt 'Benchmark Universe'; som vi skal se har det betydelig støtte observationelt. Her er $\Omega_0 = \Omega_{\mathrm{CMB},0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$, hvor $\Omega_{m,0} = 0.3$ og $\Omega_{\Lambda,0} \simeq 0.7$. Bidraget $\Omega_{\mathrm{CMB},0}$ fra den kosmiske baggrundsstråling kan findes ud fra temperaturen af strålingen til $\Omega_{\mathrm{CMB},0} = 3.4 \times 10^{-5}$. Hertil skal lægges et bidrag fra neutrinoer, der også opfører sig som relativistiske partikler. Det samlede 'strålingsbidrag' (eller relativistiske bidrag) er derfor $\Omega_{r,0} = 8.4 \times 10^{-5}$. Alderen af Universet er, med disse parametre, $t_0 = 13.5\,\mathrm{Gyr}$.

Da $\Omega_m \propto a^{-3}$ og $\Omega_r \propto a^{-4}$ er $\Omega_r/\Omega_m \propto a^{-1}$. På det nuværende tidspunkt er Universet helt domineret af stof (og Λ) men for $a \lesssim \Omega_{r,0}/\Omega_{m,0} \simeq 2.8 \times 10^{-4}$ dominerede strålingen. Det svarer, i reference-universet, til en alder på 4.7×10^4 år.