Eksamensopgaver i Astrofysik

1998 – 2006

Anden udgave, april 2007

Disse eksamensopgaver har været brugt til kurset Af.4 Astrofysik I og, siden vinter 2004–05, til kurset Astrofysik. De er lavet af Jørgen Christensen-Dalsgaard, Jes Madsen og Johan Fynbo.
Det skal bemærkes at ikke alle sæt er komplette. De manglende opgaver vil om muligt blive tilføjet senere. Bemærk også at eksamensformen til og med vinter 1999–2000 var en to-timers eksamen bedømt bestået/ikke bestået, mens der efterfølgende har været 4-timers eksamen. Endelig er kursernes omfang og lærebogsmateriale blevet ændret undervejs. Ikke desto mindre skulle opgaverne give et rimeligt indtryk af de typer af opgaver, der kan forventes i det nuværende kursus Astrofysik.

OPGAVE 1

Mikro-gravitationslinsefænomenet (jævnfør Figur 7.3 i *Introduktion til Kosmologi*) menes at skyldes, at svagtlysende "genstande", såkaldte MACHO's, i Mælkevejssystemets ydre dele fokuserer lyset fra stjerner i Den Store Magellanske Sky. Disse MACHO's har ifølge nye undersøgelser masser omkring 0.5 $M_\odot$, og da man ikke detekterer stråling fra dem, skal deres luminositet være meget mindre end luminositeten af en hovedseriestjerne med samme masse. I denne opgave betragtes nogle mulige forklaringer på disse MACHO's, blandt andet sorte huller dannet kort efter Big Bang.

a) I DETTE SPØRGSMÅL KAN DET "RIGTIGE" SVAR AFHÆNGE NOGET AF DINE ANTAGELSER, SÅ GØR OMHYGGELIGT REDE FOR DISSE. Hvad er den omtrentlige luminositet, L_{MS}, af en hovedseriestjerne med masse $0.5M_\odot$? Hvad er den øvre grænse for overfladetemperaturen af en hvid dværg, henholdsvis en neutronstjerne med masse $0.5M_\odot$ såfremt disse stjerner skal have $L < L_{MS}$?

I resten af opgaven betragter vi KUN den del af Universets historie, hvor Universet var strålingsdomineret. Endvidere antages, at KUN fotonerne bidrager til energitætheden af strålingen.

b) Vis at Universets alder under disse forudsætninger kan skrives som

$$t = 2.3\mathrm{s}\left(\frac{T}{10^{10}\mathrm{K}}\right)^{-2},$$

hvor T er strålingens temperatur, og at partikelhorisontens udstrækning er

$$s_H(T) = 1.4 \times 10^{11}\mathrm{cm}\left(\frac{T}{10^{10}\mathrm{K}}\right)^{-2}.$$

Antag i resten af opgaven, at det største, kausalt sammenhængende område i Universet har et volumen $V_H \equiv 4\pi s_H^3/3$.

c) Forklar kort, hvordan man ved, at $\eta \equiv n_{\mathrm{nukleon}}/n_\gamma \approx 3 \times 10^{-10}$, og vis, at den samlede masse af nukleoner i horisontvolumenet, V_H, er

$$M_{H,\mathrm{nuk}}(T) \approx 5.8 \times 10^{-2} M_\odot \left(\frac{T}{10^{10}\mathrm{K}}\right)^{-3}.$$

d) Find den tilsvarende "masse", $M_{H,\gamma}(T)$, indenfor horisontvolumenet, hvis også fotongassens energiækvivalente "massefylde" medregnes.

e) Antag at de observerede MACHO's er dannet ved at samle alle nukleoner indenfor horisontvolumenet til et sort hul (du skal ikke bekymre dig om, hvordan det finder sted, blot antage, at det sker). Find det tidligste tidspunkt, t_{min}, hvor dette kan have fundet sted, hvis massen skal være mindst $0.5M_\odot$.

f) Man har påvist, at sorte huller med den ønskede MACHO-masse kan være dannet under den såkaldte quark-hadron faseovergang ved $t_{QH} \approx 10^{-4}$s efter Big Bang. Dette strider mod resultatet i spørgsmål e). Forklar, hvad der er galt med antagelsen i e), og vis ud fra tidligere delresultater i opgaven, at det i princippet kan være muligt at danne sorte huller på $0.5M_\odot$ ved t_{QH}.

OPGAVE 2

a) Gør kort rede for, under hvilke omstændigheder energitransporten i stjerner sker ved konvektion. Giv en oversigt over i hvilke stjerner (udtrykt ved masse og udviklingstadier) og hvor i stjernerne man kan forvente konvektion.

Vi betragter nu hovedserieudviklingen af en stjerne med masse $M = 5M_\odot$. Som en grov approksimation antager vi, at stjernens lysstyrke $L_\text{s} = 1000L_\odot$ er konstant i hele denne fase. Stjernens oprindelige kemiske sammensætning er givet ved $X = 0.7$, $Z = 0.02$.

b) Stjernens konvektive kerne antages i gennemsnit at omfatte $0.15M$ under den udviklingsfase, hvor energiproduktionen sker ved central brintforbrænding. Beregn varigheden (i år) af denne fase. Det opgives at fusion af 1 g brint producerer 6.4×10^{18} erg.

Vi betragter nu specielt den afsluttende fase af hovedserieudviklingen, hvor stjernen bevæger sig mod voksende effektiv temperatur T_eff. Fra numeriske model-beregninger finder man, at denne fase starter når det centrale brintindhold X_c er 0.05, samt at udviklingen vender igen, ved at skalkilden bliver dominerende, når $X_\text{c} = 5 \times 10^{-4}$. I denne fase er massen af den konvektive kerne $0.1M$.

c) Beregn varigheden (i år) af denne afsluttende fase.

d) Temperaturen T i kernen er i denne fase omkring 30×10^6 K. Argumenter for, at energiproduktionen er domineret af CNO cyklen, og vis at energiproduktions-raten ϵ opfylder

$$\epsilon \propto X_\text{c} T^{16} \ .$$

e) For at opretholde en konstant luminositet, må T øges i takt med at X_c reduceres. Dette sker ved at stjernen som helhed trækker sig sammen. Brug et skøn over stjernens centrale temperatur til at argumentere for, at $X_\mathrm{c}R^{-16}$ er konstant i denne fase, hvor R er stjernens overfladeradius.

f) Bestem den samlede ændring i $\log R$ og $\log T_\mathrm{eff}$ (hvor log er titalslogaritmen) fra start til slut af denne fase.

OPGAVE 1

Nye målinger fra Hubble Space Telescope tyder på, at Hubble-parameteren har værdien 70 ± 7 km s^{-1} Mpc^{-1}.

a) Hvad er Universets nuværende alder, hvis Universet er hvilemasse-domineret med $\Omega_0 = 1$, samt hvis Universet er strålingsdomineret med $\Omega_0 = 1$?

b) Er antagelserne i spørgsmål a) rimelige? Begrund dit svar!

c) Forklar, hvorledes observationer af kugleformede stjernehobe kan bruges til at bestemme disse hobes alder, og gør kort rede for, hvorledes sådanne aldersbestemmelser kan sætte grænser for Universets alder.

d) Visse aldersbestemmelser af kugleformede stjernehobe tyder på, at de ældste er omkring 15 milliarder år gamle. Kommentér dette resultat i lyset af svarene på de foregående spørgsmål.

e) Nye undersøgelser af meget fjerne supernovaeksplosioner tyder på eksistensen af en såkaldt kosmologisk konstant, der virker som en universel, kosmisk frastødning (acceleration). Forklar, at en sådan frastødning for givne værdier af Hubble-parameteren og Ω_0 betyder, at Universet er ældre end beregnet uden den kosmologiske konstant.

OPGAVE 2

Vi betragter det kollaps af de centrale dele af en stjerne, der fører til en supernova-eksplosion. Det antages at kollapset omfatter $1M_\odot$, hvor $M_\odot = 1.989 \times 10^{33}$ g er Solens masse, og at alt stoffet i denne del af stjernen omdannes til neutroner.

a) Gør rede for, at der ved omdannelsen af kernestoffet til neutroner produceres neutrinoer, og giv et begrundet skøn over det samlede antal N_ν af neutrinoer produceret ved denne proces.

Detaljerede modeller viser, at andre processer under eksplosionen også bidrager til produktionen af neutrinoer. Således er det totale antal neutrinoer produceret ved supernova-eksplosionen $N_{\nu,\mathrm{tot}} = 1.2 \times 10^{58}$.

b) De producerede neutrinoer har en middel-energi på 10 MeV. Argumenter for, at den samlede energi udsendt i neutrinoer udgør den dominerende del af den energi, der frigøres ved det gravitationelle kollaps.

Vi betragter nu supernovaen SN1987A i den Store Magellanske Sky. Supernovaens afstand fra Jorden var 50 kpc.

c) Antag af udsendelsen af neutrinoer skete over et tidsrum på 10 s, og at neutrinoerne er masse-løse. Bestem herudfra den gennemsnitlige fluks af neutrinoer, svarende til $N_{\nu,\mathrm{tot}}$, på Jorden.

d) Neutrinoerne blev detekteret med Kamiokande detektoren i Japan, ved spredning af neutrinoer på elektroner i vand. Detektoren indeholdt 2000 tons vand, og tværsnittet for en reaktion mellem en neutrino og en elektron er $4 \times 10^{-43}\,\mathrm{cm}^2$. Bestem det samlede antal reaktioner i detektoren. (Dette antal blev faktisk målt!)

e) Hvis neutrinoerne har en endelig masse, bevæger de sig med hastigheder mindre end lysets. Det forårsager en forsinkelse Δt i deres ankomst, relativt til ankomsttiden svarende til lyshastigheden. Vis at for neutrinoer fra SN1987A er

$$\Delta t \simeq 2.5\,\mathrm{s} \left(\frac{10\,\mathrm{MeV}}{E_\nu}\right)^2 \left(\frac{m_\nu c^2}{10\,\mathrm{eV}}\right)^2 ,$$

hvor E_ν er neutrinoens energi, m_ν er dens masse og c er lyshastigheden; det oplyses at den relativistiske sammenhæng mellem en partikels energi E, fart v og masse m er

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ,$$

samt at $m_\nu c^2$ kan antages at være meget mindre end E_ν.

f) De udsendte neutrinoer har en fordeling i energi, der antages at ligge mellem 5 MeV og 15 MeV. Argumenter for, at dette bidrager til spredningen i deres ankomsttidspunkter, og for, at man heraf i princippet har mulighed for at bestemme neutrinoernes masse.

OPGAVE 1

Antag at Universet er hvilemassedomineret med nuværende tæthedsparameter $\Omega_0 = 1$ og Hubble-parameter $H_0 = 60$ km s^{-1} Mpc^{-1}.

a) Beregn Universets nuværende alder, t_0, den nuværende tæthed, ρ_0, samt den nuværende kritiske tæthed, ρ_{c0}.

b) Beregn t, H, Ω, ρ, ρ_c og K når skalafaktoren er dobbelt så stor som idag.

c) Skitsér grafisk den tidslige udvikling fra Big Bang til $t \gg t_0$ af følgende størrelser: R, H, Ω, ρ, ρ_c, K. Giv en kort forklaring til de enkelte grafer.

d) Som spørgsmål c), men for $\Omega_0 \gg 1$.

e) Som spørgsmål c), men for $\Omega_0 \ll 1$.

f) Sammenlign resultaterne fra spørgsmål c), d) og e) og kommentér forskelle og ligheder.

g) Hvordan ville resultaterne ændre sig, hvis Universet var strålingsdomineret i stedet for hvilemassedomineret?

OPGAVE 2

Vi betragter varigheden af forskellige udviklingsfaser for stjerner.

a) Giv en kort diskussion af de faktorer, der bestemmer stjernens levetid $t_{\rm MS}$ på hovedserien (dvs. under den centrale brintforbrænding).

b) Beregn energiproduktionen (i erg/g) ved fusion af 1 g ren brint. Der ses bort fra neutrino-tabene. Værdierne i Appendix B fra *Lecture Notes* (vedhæftet) benyttes.

c) Skitser på en graf hvordan $t_{\rm MS}$ afhænger af stjernens masse, og argumenter for den viste opførsel.

Vi betragter nu udviklingen af en $5M_\odot$ stjerne. Variationen af stjernens indre struktur fremgår af *Lecture Notes*, Fig. 12.3, panel a), fra *Lecture Notes* (vedhæftet). Stjernens oprindelige grundstofindhold er givet ved $X = 0.6$, $Z = 0.04$. Vi antager at stjernens gennemsnitlige lysstyrke i de betragtede udviklingsfaser er $10^3 L_\odot$.

d) Giv et skøn, ud fra figuren, af den del af stjernens masse der i gennemsnit er involveret i den centrale brintforbrænding, og bestem derudfra t_{MS}. Sammenlign med den faktiske varighed, bestemt fra figuren.

Vi betragter nu den centrale heliumforbrænding.

e) Beregn energiproduktionen (i erg/g) ved fusion af 1 g ren helium til henholdsvis ^{12}C, ^{16}O and ^{20}Ne. Værdierne i Appendix B fra *Lecture Notes* (vedhæftet) benyttes.

f) Giv et skøn, ud fra figuren, af den del af stjernens masse der i gennemsnit er involveret i den centrale heliumforbrænding, og bestem derudfra varigheden af denne fase. Sammenlign med den faktiske varighed, bestemt fra figuren, og diskuter årsagerne til en eventuel uoverensstemmelse.

Opgave 1 og 2 mangler indtil videre.

OPGAVE 3

Vi betragter konvektive kerner i hovedseriestjerner. Som bekendt gælder det generelt at kernen omfatter en mindre del af stjernens masse efterhånden som stjernen udvikler sig. For stjerner, der netop har en konvektiv kerne, er der dog tilfælde hvor kernen vokser med voksende alder. Her betragter vi dette grænsetilfælde.

a) Betingelsen for konvektiv ustabilitet er som bekendt at $\nabla_R > \nabla_{\rm ad}$, hvor ∇_R er den temperaturgradient, udtrykt som $\mathrm{d}\ln T/\mathrm{d}\ln p$, der er nødvendig for at transportere energien ved stråling, og $\nabla_{\rm ad}$ er den adiabatiske gradient. Vi kan antage at $\nabla_{\rm ad} = 2/5$. Vis at ∇_R kan skrives

$$\nabla_R = \frac{3}{16\pi a\tilde{c}G}\frac{\kappa p}{T^4}\frac{L}{m} \; , \tag{1}$$

hvor a er strålingsenergitæthedskonstanten, $\tilde{c}$ lysets hastighed, og G gravitationskonstanten; desuden er κ opaciteten, p trykket, T temperaturen, L er lysstyrken i den betragtede afstand fra stjernens centrum og m er massen inden for denne afstand.

b) Giv argumenter for at ∇_R har et lokalt maksimum ved stjernens centrum; det kan antages at opaciteten er domineret af elektronspredning. Vis at den centrale værdi af ∇_R kan skrives

$$\nabla_{R,\rm c} = \frac{3}{16\pi a\tilde{c}G}\frac{\kappa_{\rm c}p_{\rm c}}{T_{\rm c}^4}\epsilon_{\rm c} \; , \tag{2}$$

hvor subscript 'c' angiver centrale værdier, og $\epsilon_{\rm c}$ er den centrale energiproduktionshastighed, per masse- og tidsenhed.

c) For de betragtede stjerner bidrager både PP kæderne og CNO cyklen til energiproduktionen. Vi antager at begge processer opererer i ligevægt. Vis at energiproduktionshastigheden kan skrives som

$$\epsilon \simeq \epsilon_{\rm PP}^{(0)}\rho X^2 T^{n_{\rm PP}} + \epsilon_{\rm CNO}^{(0)}\rho X X_{14} T^{n_{\rm CNO}} \; , \tag{3}$$

hvor ρ er massefylden, X er brintindholdet per masseenhed, X_{14} er indholdet af ^{14}N per masseenhed, og $\epsilon_{\rm PP}^{(0)}$, $\epsilon_{\rm CNO}^{(0)}$, $n_{\rm PP}$ og $n_{\rm CNO}$ er konstanter. Argumenter også for at $n_{\rm CNO} \gg n_{\rm PP}$.

En vigtig effekt i udviklingen af den konvektive kerne er, at X_{14} vokser med tiden ved at ^{16}O bliver transformeret til ^{14}N ved reaktionen

$$^{16}\mathrm{O}(^{1}\mathrm{H},\gamma)\,^{17}\mathrm{F}(\mathrm{e}^{+}\nu_e)\,^{17}\mathrm{O}(^{1}\mathrm{H},{}^{4}\mathrm{He})\,^{14}\mathrm{N}\;. \tag{4}$$

I denne reaktions-serie er det den første reaktion, der styrer hastigheden; den er så langsom, at væksten i X_{14} foregår på ca. samme tidsskala som stjernens øvrige udvikling.
For at undersøge effekten af denne ændring på den konvektive ustabilitet gør vi følgende simplificerende antagelser:

- effekten af ændringer i p_c, T_c og κ_c på $\nabla_{R,\mathrm{c}}$ kan negliceres.
- ændringen i stjernens overflade-lysstyrke kan negligeres.
- energiproduktionshastighedens afhængighed af afstanden til stjernens centrum kan approximeres ved

$$\epsilon(q) = \epsilon^{(\mathrm{c})}_{\mathrm{PP}}(1-q)^{n_{\mathrm{PP}}} + \epsilon^{(\mathrm{c})}_{\mathrm{CNO}}(1-q)^{n_{\mathrm{CNO}}}\;; \tag{5}$$

  her er $q = m/M$ hvor M er stjernens overflademasse, og $\epsilon^{(\mathrm{c})}_{\mathrm{PP}}$ og $\epsilon^{(\mathrm{c})}_{\mathrm{CNO}}$ er bidragene til den centrale energiproduktionshastighed fra henholdsvis PP kæderne og CNO cyklen.

d) Vis, ud fra ligning (5), at

$$\frac{\epsilon_\mathrm{c}}{L_\mathrm{s}/M} = (n_{\mathrm{PP}}+1)\frac{1+\dfrac{\epsilon^{(\mathrm{c})}_{\mathrm{CNO}}}{\epsilon^{(\mathrm{c})}_{\mathrm{PP}}}}{1+\dfrac{n_{\mathrm{PP}}+1}{n_{\mathrm{CNO}}+1}\dfrac{\epsilon^{(\mathrm{c})}_{\mathrm{CNO}}}{\epsilon^{(\mathrm{c})}_{\mathrm{PP}}}} \tag{6}$$

Argumenter herudfra, og ud fra de øvrige antagelser, for at $\nabla_{R,\mathrm{c}}$ vokser når X_{14} vokser, og dermed for, at der kan opstå en konvektiv kerne i stjernen under hovedserieudviklingen.

e) Vi betragter en stjerne med oprindeligt brintindhold $X_0 = 0,7$, hvor en konvektiv kerne opstår når det centrale brintindhold er reduceret til $X_\mathrm{c} = 0,5$. Kernen antages herefter at vokse i udstrækning, målt i dens masse. Skitser variationen $X(m)$ af brintindholdet for nogle efterfølgende tidspunkter. Vis også at denne udvikling fører til en diskontinuitet i massefylden ρ ved grænsen for den konvektive kerne.

Vi kan retfærdiggøre antagelsen om den langsomme omdannelse af ^{16}O til ^{14}N ved at beregne tidsskalaen for forbrændingen af ^{16}O. Vi betragter reaktionen $^{16}\mathrm{O}(^{1}\mathrm{H},\gamma)\,^{17}\mathrm{F}$; for denne reaktion kan middelværdien af produktet af tværsnit og kernefart skrives som

$$\langle\sigma v\rangle_{16} = 9.844\times10^{-19}\eta^2\exp(-\eta)\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1}\;; \tag{7}$$

her er $\eta = BT_6^{-1/3}$, hvor $T_6 = T/(10^6\,\mathrm{K})$ og konstanten B for denne reaktion er $B = 166,96$.

f) Vis at ændringshastigheden i X_{14} kan skrives som

$$\frac{1}{X_{14}}\frac{\mathrm{d}X_{14}}{\mathrm{d}t} = \frac{14}{16}\frac{X_{16}}{X_{14}}\tau_{16}^{-1} \; , \tag{8}$$

hvor

$$\tau_{16}^{-1} = \langle\sigma v\rangle_{16}\frac{X}{\mathcal{A}_{\mathrm{H}} m_{\mathrm{u}}}\rho \; ; \tag{9}$$

her er $\mathcal{A}_{\mathrm{H}}$ atommassen af brint, m_{u} er atommasse-enheden, og X_{16} er indholdet af ^{16}O per massenhed. (Bemærk at da X_{14} og X_{16} er af samme størrelsesorden giver τ_{16} derfor et mål for tidsskalaen for ændringen i indholdet af ^{14}N.) Beregn τ_{16} i år for $T = 16,7 \times 10^6\,\mathrm{K}$, $\rho = 100\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ og $X = 0,7$.

OPGAVE 1

Figuren viser et farve-lysstyrke-diagram for en kugleformet stjernehob, kaldet 47 Tucanae, på grundlag af observationer med Hubble rumteleskopet. V og I_c er størrelsesklasser i to størrelsesklassesystemer, sådan at farveindekset $V - I_c$ giver et mål for den effektive temperatur.

a) På farve-lysstyrke-diagrammet er markeret tre områder, I, II og III. Gør kvalitativt rede for udviklingsstatus for stjernerne i hvert af disse tre områder.

I denne opgave skal vi specielt undersøge egenskaberne ved de stjerner, der er vist med større symboler, de såkaldte *blue stragglers* ('blå strejfere'; navnet kommer af, at de er varmere og dermed mere blå end de resterende stjerner i hoben).

b) For stjernen V15 i figuren gælder at $V = 15.3$ og $V - I_c = 0.23$. Beregn forholdet $L_{\rm V15}/L_{\rm TO}$ mellem denne stjernes lysstyrke og lysstyrken af en stjerne ved 'turn-off' i diagrammet (ligeledes markeret); det antages at for en turn-off stjerne er størrelsesklassen $V_{\rm TO} = 17.5$ og farveindekset $(V - I_c)_{\rm TO} = 0.6$. I sammenhængen mellem størrelsesklassen V og stjernens lysstyrke kan den bolometriske korrektion negligeres.
Det opgives, at sammenhængen mellem stjernens effektive temperatur $T_{\rm eff}$ og $V - I_c$ kan skrives

$$V - I_c = 2.11 - 2.36 \times 10^{-4}\, T_{\rm eff} \ , \tag{1}$$

i det relevante område af $V - I_c$, hvor $T_{\rm eff}$ måles i K. Beregn også forholdet $R_{\rm V15}/R_{\rm TO}$ mellem stjernens radius og turn-off stjernens radius.

For at bestemme stjernens masse antager vi at masse-lysstyrke relationen kan skrives

$$L \propto M^{5.5} \mu_{\rm env}^{7.5} R^{-0.5} \ , \tag{2}$$

hvor M er stjernens masse og $\mu_{\rm env}$ er middelmolekylvægten i den del af stjernen, der ligger uden for den energiproducerende kerne.

c) Vi antager i dette spørgsmål at $\mu_{\rm env}$ er den samme for V15 og for turn-off stjernen. Beregn forholdet $M_{\rm V15}/M_{\rm TO}$ mellem stjernens masse og turn-off stjernens masse.

d) Giv et skøn over forholdet mellem V15's levetid, fra alder-nul hovedserien frem til det tidspunkt hvor brinten er brugt op i stjernens centrum, og den tilsvarende levetid for turn-off stjernen; det antages at V15 udvikler sig på samme måde som en 'normal' hovedseriestjerne. Argumenter for, at levetiden for turn-off stjernen svarer til hobens alder; argumenter derudfra for, at det kan være svært at forstå hvordan V15 og de andre blue stragglers kan være medlemmer af hoben.

Andre undersøgelser har vist at blue stragglers rent faktisk er medlemmer af hoben. Deres beliggenhed i farve-lysstyrke-diagrammet forklares ved at de er dannet ved at to stjerner er smeltet sammen, under en kollision mellem stjernerne. Sandsynligheden herfor er tilstrækkelig høj i de centrale dele af en kugleformet stjernehob, hvor stjernetætheden er meget stor.

e) Argumenter kvalitativt, ud fra det under punkt c) fundne masse-forhold $M_{\rm V15}/M_{\rm TO}$, for at denne forklaring kan være rigtig.

Som nævnt antages det at blue stragglers dannes ved at to stjerner smelter sammen, efter en kollision. Detaljerne i denne proces er dog endnu meget usikre. Her betragter vi to mulige scenarier for den struktur, der resulterer af dannelsesprocessen:

1) Den resulterende stjerne har nogenlunde samme grundlæggende struktur som de oprindelige stjerner; specielt sker der ikke nogen opblanding mellem de områder, hvor brintindholdet er reduceret på grund af kernereaktioner, og resten af stjernen.

2) Kollisionen er så voldsom, at den resulterende stjerne er kemisk homogen lige efter sin dannelse.

f) Vi betragter en blue straggler, der er dannet ved at to stjerner ved turn-off er smeltet sammen, ifølge scenario 1). I dette tilfælde er $\mu_{\rm env}$ den samme i den nydannede blue straggler som i de oprindelige stjerner. Beregn forholdet $L_{\rm BS}/L_{\rm TO}$ mellem den nydannede blue straggler og en turn-off stjerne; det antages, at der for de relevante stjerner gælder at

$$R \propto M^{1.4} \ . \tag{3}$$

g) Ved dannelse under scenario 2), med fuldstændig blanding, må vi først skønne over den resulterende grundstofsammensætning. Vi gør følgende antagelser:

i) På alder-nul hovedserien havde hobens stjerner brintindholdet $X_0 = 0.75$ og indholdet af tunge grundstoffer $Z_0 = 0.005$.

ii) Hobens alder er 10^{10} år.

iii) Turn-off stjernens masse er $M_{\rm TO} = 0.9 M_\odot$, hvor $M_\odot$ er Solens masse.

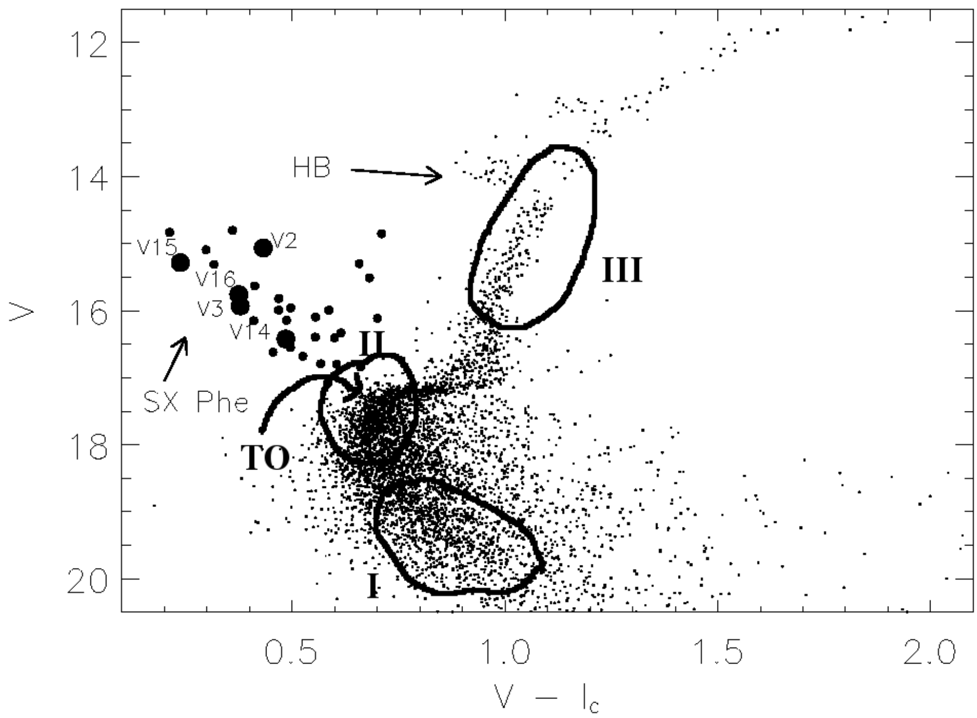
iv) Turn-off stjernens lysstyrke vokser lineært med tiden fra $0.65 L_\odot$ på alder-nul hovedserien til $1.4 L_\odot$ ved hobens alder; her er $L_\odot$ Solens lysstyrke.

v) Dannelse af et helium-atom ud fra fusion af fire brintatomer frigør effektivt 25 MeV.

Beregn ud fra disse antagelser brintindholdet X i den nydannede blue straggler.

h) Beregn ud fra resultatet i opgave g) forholdet $L_{\rm BS}/L_{\rm TO}$ under scenario 2). Det antages at $\mu_{\rm env}$ i turn-off stjernen svarer til hobens oprindelige grundstofsammensætning (X_0, Z_0), samt at masse-radius relationen er givet ved ligning (3).

i) Bestem V og $V - I_c$ for den nydannede blue straggler i de to scenarier.



Figur til Opgave 1. Den omtalte stjerne V15 samt en typisk stjerne ved turn-off (TO) er markeret.

Opgave 2 mangler indtil videre.

OPGAVE 1

Forekomsterne af de radioaktive kerner ^{232}Th og ^{238}U er for nylig blevet målt i den meget gamle stjerne CS 31082-001. Disse to kerners halveringstider $t_{1/2}$ er sammenlignelige med den alder, man antager universet har ($t_{1/2} = 14.05 \times 10^9$ år for ^{232}Th og 4.47×10^9 år for ^{238}U). Det er sandsynligt, at begge kerner er blevet dannet samtidigt over en meget kort periode tidligt i galaksens historie. Vi sætter alderen $t = 0$ ved dette dannelsestidspunkt.

Produktionsratioen for de to kerner defineres som:

$$r(t=0) = \frac{N_{\mathrm{U}}(t=0)}{N_{\mathrm{Th}}(t=0)} = \frac{\text{antal dannede U kerner}}{\text{antal dannede Th kerner}}$$

Efter dannelsen af kernerne er begge kerner henfaldet i henhold til loven

$$N(t) = N(t=0)\, \exp\left\{-\ln 2\, \frac{t}{t_{1/2}}\right\}.$$

Den observerede ratio for de to kerner er

$$r(\Delta t) = \frac{N_{\mathrm{U}}(\Delta t)}{N_{\mathrm{Th}}(\Delta t)} = 0.18,$$

hvor Δt svarer til stjernens alder. Produktionsratioen må findes ved hjælp af modeller, som forudser $r(t=0) \simeq 0.6$.

a) Hvor gammel er stjernen?

OPGAVE 2

Antag at universet altid har været domineret af stof. Den relevante Friedmann-ligning er givet ved

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8}{3}\pi G \rho(t) R^2(t) - kc^2, \tag{2.1}$$

hvor t betegner universets alder, $R(t)$ er skalafaktoren, c er lysets hastighed, $k(= \pm 1, 0)$ definerer krumningsparameteren, og $\rho(t)$ er massetætheden.

a) Vis at den kritiske massetæthed, som fører til et univers med $k = 0$, er

$$\rho_{\mathrm{c}}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G},$$

hvor $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$ er Hubble-parameteren.

I spørgsmål b) – d) antager vi at universet er fladt ($k = 0$).

b) Vis at

$$R(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (H_0 t)^{2/3} R_0,$$

hvor H_0 er værdien af Hubble-parameteren ved universets nuværende alder t_0 og $R_0 = R(t_0)$.

Definer Hubble-tiden $t_{\mathrm{H}} = H_0^{-1}$ og vis at universets nuværende alder er

$$t_0 = \frac{2}{3} t_{\mathrm{H}} \, .$$

c) Anvend relationen

$$1 + z = \frac{R_0}{R(t)},$$

hvor z er rødforskydningen, til at vise at alderen t kan udtrykkes som en funktion af rødforskydningen ved

$$t(z) = \frac{2}{3} \frac{t_{\mathrm{H}}}{(1+z)^{3/2}}.$$

d) "Lookback"-tiden, t_{L} defineres som, hvor langt tilbage i tiden man ser, når man betragter et objekt med rødforskydningen z. Det er blot forskellen mellem universets nuværende alder t_0 og dets alder på tidspunktet $t(z)$:

$$t_{\mathrm{L}} = t_0 - t(z)$$

En fjern kvasar har en rødforskydning på $z = 5$. Beregn $t_{\mathrm{L}}/t_{\mathrm{H}}$ for denne kvasar.

Hvor gammelt var universet (i brøkdel af dets nuværende alder t_0), da det observerede lys forlod kvasaren?

Observationer af nyere dato viser, at vort univers har en kosmologisk konstant Λ forskellig fra nul. Et sådant univers beskrives af følgende Friedmann-ligning:

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8}{3}\pi G \rho(t) R^2(t) - kc^2 + \frac{\Lambda}{3} c^2 R^2(t) \tag{2.2}$$

(bemærk at vi i spørgsmål e) – g) betragter det generelle tilfælde, hvor k ikke nødvendigvis er 0). Vi definerer

$$\Omega(t) = \rho(t)/\rho_{\mathrm{c}}(t)$$

og

$$\Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda c^2}{3H^2(t)}$$

med den kritiske massetæthed $\rho_c(t)$ og Hubble-parameteren $H(t)$.

e) Vis at Friedmann-ligningen (2.2) kan omskrives til

$$\Omega(t) + \Omega_\Lambda(t) - 1 = \frac{kc^2}{R^2(t)H^2(t)}.$$

f) Anvend $R^3(t)\rho(t) = R_0^3\rho(t_0) = R_0^3\rho_0$,
hvor t_0 er den nuværende tid, til at vise at

$$\ddot{R}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}R(t) = -\left(\frac{4}{3}\pi G\rho(t) - \frac{1}{3}\Lambda c^2\right) R(t).$$

g) Universets decelerationsparameter $q(t)$ defineres som

$$q(t) = -\frac{R(t)\ddot{R}(t)}{(\dot{R}(t))^2}.$$

Vis at

$$q(t) = \frac{\Omega(t)}{2} - \Omega_\Lambda(t)$$

h) Antag igen at universet et fladt ($k = 0$). Anvend resultatet af e) til at udtrykke $q(t)$ alene som funktion af $\Omega(t)$. Målinger viser, at det nuværende univers muligvis accelererer, dvs. $q(t_0) < 0$. Hvad er den tilsvarende grænse for $\Omega(t_0)$?

OPGAVE 3

Vi betragter isokroner, dvs modeller med samme alder og kemiske sammensætning, men forskellig masse. Specielt er vi interesserede i, hvordan stjernernes effektive temperatur $T_{\rm eff}$ og overfladelysstyrke $L_{\rm s}$ afhænger af alder og kemisk sammensætning.

a) Gør kort rede for at fordelingen af stjerner i en stjernehob, plottet i et $(\log T_{\rm eff}, \log L_{\rm s})$ diagram, kan beskrives ved en isokron.

For at undersøge egenskaberne ved isokroner antager vi, at en stjernes overfladelysstyrke tilfredsstiller

$$\frac{L_\mathrm{s}}{L_{\mathrm{s},\odot}} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{5.5} \frac{0.02}{Z} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^9 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-0.5} . \tag{3.1}$$

Her er $L_{\mathrm{s},\odot}$ Solens overfladelysstyrke, M og R stjernens masse og overfladeradius, og $M_\odot$ og $R_\odot$ er værdierne for Solen; desuden er Z indholdet af tunge grundstoffer, og μ er et passende gennemsnit af middelmolekylvægten, som vi antager givet ved

$$\mu = \frac{4}{3 + 5\bar{X}} ; \tag{3.2}$$

$\bar{X}$ er det gennemsnitlige brintindhold i stjernen,

$$\bar{X} = M^{-1} \int_0^M X \mathrm{d}m , \tag{3.3}$$

hvor m er massen inden for det givne punkt. Referenceværdien μ_0 svarer til $\bar{X} = 0.7$. Endelig antager vi at stjernens radius tilfredsstiller

$$\frac{R}{R_\odot} = \frac{M}{M_\odot} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^4 ; \tag{3.4}$$

denne relation udtrykker at radius vokser som følge af stjernens udvikling. (Det kan bemærkes at de her anvendte relationer afviger lidt fra hvad der er opgivet i *Lecture Notes on Stellar Structure and Evolution*; de anvendte parametre er tilpasset beregnede stjernemodeller.)

b) Find et udtryk for $L_\mathrm{s}/L_{\mathrm{s},\odot}$ ved M, μ og Z. Vis desuden at dette udtryk kan skrives

$$\frac{L_\mathrm{s}}{L_{\mathrm{s},\odot}} = \left(\frac{T_\mathrm{eff}}{T_{\mathrm{eff},\odot}}\right)^{20/3} \left(\frac{Z}{0.02}\right)^{2/3} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{26/3} . \tag{3.5}$$

Vi betragter nu som et specielt tilfælde alder-nul hovedserien, hvor $\bar{X}$ er den samme for alle stjerner; vi antager at $\bar{X} = 0.7$.

c) Vis at ligning (3.5) definerer en lineær sammenhæng mellem M_bol og $\log T_\mathrm{eff}$, hvor M_bol er den absolutte bolometriske størrelsesklasse.

d) Betragt to alder-nul hovedserier, med henholdsvis $Z = 0.02$ og 0.01, men med samme $\bar{X} = 0.7$. Find forskellen $M_\mathrm{bol}(Z = 0.02) - M_\mathrm{bol}(Z = 0.01)$ mellem de respektive bolometriske størrelsesklasser, ved fastholdt T_eff.

Vi betragter nu ændringen i beliggenheden af isokronen med alderen, for fastholdt $Z = 0.02$.

e) Vis at ændringen i $\bar{X}$ med tiden t for en given stjerne tilfredsstiller

$$\frac{\mathrm{d}\bar{X}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau_0}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^7 , \tag{3.6}$$

hvor

$$\tau_0 = \frac{QM}{4m_\mathrm{H}L_{\mathrm{s},0}} ; \tag{3.7}$$

her er Q den effektive energiproduktion ved fusion af fire brint-atomer, m_H er massen af et brintatom, og $L_{\mathrm{s},0}$ er lysstyrken ved $t = 0$, $\bar{X} = 0.7$ for en stjerne med massen M.

f) Vis at løsningen til ligning (3.6) kan skrives

$$t = \frac{\tau_0}{10\mu_0}\left[1 - \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^8\right] . \tag{3.8}$$

g) Turn-off af isokronen er defineret som det punkt hvor brinten er brugt op i stjernens centrum. Vi antager at det svarer til at $\bar{X}$ er reduceret til 0.5. Til dette punkt svarer en bestemt masse, kaldet turn-off massen, der afhænger af isokronens alder t_i. Bestem ud fra ligning (3.8) turn-off massen, i enheder af $M_\odot$, for $t_\mathrm{i} = 10^7$ år, 10^8 år, 10^9 år og 10^{10} år. Det opgives at $Q = 25$ MeV, $M_\odot = 1.989 \times 10^{33}\,\mathrm{g}$ og $L_{\mathrm{s},\odot} = 3.846 \times 10^{33}\,\mathrm{erg\,s^{-1}}$.

OPGAVE 1

I det tidlige univers er entropien i et volumen $R^3(t)$, hvor *R(t)* er skalaparameteren og t er tiden, givet ved:

$$S(R^3, T) = \frac{4}{3}\frac{R^3(t)}{T}\rho(T)c^2 \; .$$

T angiver temperaturen og $\rho(T)c^2$ den totale energitæthed, hvor c er lyshastigheden. Antag at universet består af relativistiske fermioner og fotoner. Dette giver:

$$\rho c^2 = a\,T^4 \qquad \text{for fotoner}$$

og

$$\rho c^2 = g_s \frac{7}{16} a\,T^4 \qquad \text{for fermioner,}$$

hvor a angiver strålingstæthedskonstanten. Den statistiske faktor g_s er 2 for elektroner og positroner, og $g_s = 1$ for alle neutrinoer og antineutrinoer. Antag at universets ekspansion har været adiabatisk, dvs. $S(R^3, T) =$ konst.

a) Vis at $R \sim 1/T$ for et adiabatisk ekspanderende univers, hvor energitætheden er givet ved fotoner og relativistiske fermioner.

b) Beregn energitætheden $\rho(T)c^2$ for følgende tre temperaturområder, idet det antages at kun de nævnte partikler bidrog i de angivne temperaturintervaller, og at alle var relativistiske:

$10^{10}\mathrm{K} < T < 10^{12}\,\mathrm{K}$:	fotoner, elektroner, positroner, 3 neutrinotyper, 3 antineutrinotyper
$5 \times 10^9\,\mathrm{K} < T < 10^{10}\,\mathrm{K}$:	fotoner, elektroner, positroner
$T < 5 \times 10^9\,\mathrm{K}$:	fotoner

c) Beregn forholdet

$$\frac{(RT)_{T<5\times10^9\,\mathrm{K}}}{(RT)_{T>5\times10^9\,\mathrm{K}}} \, ,$$

under antagelse af at universets ekspansion er adiabatisk ($S(R^3, T) =$ konst).

d) I den tidlige epoke, som vi betragter, er universet strålingsdomineret, dvs. $T = T_\gamma$, hvor T_γ er fotonernes temperatur. Ved $T \simeq 10^{10}$ K afkobles neutrinoerne fra resten af universet og det er nødvendigt at skelne mellem neutrinoernes temperatur T_ν og T_γ. For $T > 5 \times 10^9$ K har vi $T = T_\gamma = T_\nu =$ konst.$/R$. Ved $T \simeq 5 \times 10^9$ K annihileres elektroner og positroner, hvilket forøger fotontemperaturen T_γ men ikke har indflydelse på T_ν. For $T < 5 \times 10^9$ K har vi således $T = T_\gamma > T_\nu$. Bemærk at skalaparameteren er den samme for fotoner og neutrinoer, og benyt derefter resultatet fra b) til at beregne forholdet $T_\gamma/T_\nu = T/T_\nu$ for $T \lesssim 5 \times 10^9\,$K.

e) Forholdet T_γ/T_ν er uændret efter e^+e^- annihilationen. Den nuværende temperatur for den kosmiske mikrobølgebaggrund er $T_{\gamma,0} = 2.7\,$K. Beregn neutrinobaggrundens nuværende temperatur, $T_{\nu,0}$.

f) Fotoners antalstæthed er givet ved

$$n_\gamma \simeq \frac{2.4}{\pi^2}\left(\frac{kT_\gamma}{\hbar c}\right)^3 ,$$

hvor k er Boltzmann's konstant.

Beregn det nuværende antal fotoner pr. cm^3 i den kosmiske mikrobølgebaggrund (det opgives at $\hbar c = 197$ MeV fm, hvor 1 fm $= 10^{-15}$ m; $kT = 86\,$MeV for $T = 10^{12}\,$K).

g) Antalstætheden for hver af de 3 neutrinofamilier er givet ved:

$$n_\nu \simeq \frac{1.8}{\pi^2}\left(\frac{kT_\nu}{\hbar c}\right)^3 .$$

Hvor mange neutrinoer (pr. familie) er der pr. cm^3 i den nuværende neutrinobaggrund?

h) Nye eksperimenter indikerer at neutrinoer har masse. Antag at der er et massehierarki mellem de 3 neutrinofamilier: dvs. $m_3 \gg m_2 \gg m_1$, hvor m_i er de 3 neutrinotypers masser. Massen m_3 er stor nok til at denne neutrinofamilie er ikke-relativistisk i det nuværende univers. Dens energitæthed er således givet ved $\rho_0 c^2 = m_3 c^2 n_\nu$. For hver neutrinofamilie antages universet at indeholde både neutrinoer og anti-neutrinoer, med samme masse og antalstæthed.

Antag et lukket univers, $\Omega = 1$. Dette gør det muligt at bestemme den øvre grænse for m_3 ved hjælp af $\rho_\nu \leq \rho_{\mathrm{cr}}$. Benyt de nuværende værdier for ρ_ν og $\rho_{\mathrm{cr}} = (0.8 \times 10^{-29})$ g/cm^3 til at beregne den øvre grænse for $m_3 c^2$.

OPGAVE 2

Vi betragter reaktionen

$$^2\mathrm{D}(^1\mathrm{H}, \gamma)^3\mathrm{He} \; . \tag{1}$$

For denne reaktion kan gennemsnittet $\langle \sigma v \rangle$ af reaktionstværsnittet σ og den relative fart v findes som funktion af temperaturen T ud fra

$$\langle \sigma v \rangle = 1.08 \times 10^{-26} \eta^2 \exp(-\eta) \; , \tag{2}$$

i cgs enheder; her er $\eta = 37.21 T_6^{-1/3}$, hvor $T_6 = T/(10^6\,\mathrm{K})$.

a) Vis at destruktionsraten af ^{2}D på grund af reaktionen (1) kan skrives

$$\frac{\mathrm{d}n_{^2\mathrm{D}}}{\mathrm{d}t} \equiv -\frac{n_{^2\mathrm{D}}}{\tau_{^2\mathrm{D}}} = -\frac{\langle \sigma v \rangle \rho X}{m_\mathrm{u} A_\mathrm{H}} n_{^2\mathrm{D}} \; , \tag{3}$$

hvor $n_{^2\mathrm{D}}$ er antalstætheden af ^{2}D, ρ er massefylden, X er brintindholdet, m_u er atommasseenheden, og A_H er atomvægten af brint.

b) Beregn $\tau_{^2\mathrm{D}}$ for forholdene i Solens centrum ($T = 1.5 \times 10^7\,\mathrm{K}$, $\rho = 150\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, $X = 0.33$).

Reaktionen (1) spiller en rolle under sammentrækningen af en stjerne før hovedserien, på grund af det, relativt til andre reaktioner, meget høje tværsnit; det betyder at reaktionen kan finde sted ved relativt lave temperaturer. Vi betragter her forholdene for en $1 M_\odot$ stjerne, og antager at indholdet $X_{^2\mathrm{D}}$ per masseenhed af ^{2}D i det stof, stjernen blev dannet af, var $X_{^2\mathrm{D}} = 10^{-4}$.

c) Antag at ^{2}D-forbrænding finder sted i de indre 20 % af stjernens masse. Bestem, ud fra masse-excesserne i Appendix B i *Lecture Notes on Stellar Structure and Evolution*, den samlede mængde energi der kan produceres ved ^{2}D-forbrændingen. Bestem også hvor lang tid, i år, denne energimængde kan opretholde en lysstyrke på Solens lysstyrke, $1 L_{\mathrm{s},\odot}$.

Vi betragter nu en stjerne på Hayashi-sporet; stjernen kan derfor approksimeres med en polytrop model, med polytropt index 3/2. Det oplyses, at for en sådan polytrop er den centrale temperatur T_c og den centrale massefylde ρ_c givet ved

$$T_\mathrm{c} = (1.235 \times 10^7\,\mathrm{K}) \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{R_\odot}{R} \right) \mu \; , \quad \rho_\mathrm{c} = (8.437\,\mathrm{g\,cm^{-3}}) \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{R_\odot}{R} \right)^3 \; ; \tag{4}$$

her er M og R stjernens masse og radius, $M_\odot$ og $R_\odot$ er Solens masse og radius, og μ er middelmolekylvægten.

d) Vi betragter en $1M_\odot$ stjerne under sammentrækning. Den kemiske sammensætning antages givet ved $X = 0.7$, $Z = 0.02$. På et tidspunkt er $T_c = T_0 = 2 \times 10^6\,\mathrm{K}$. Find den tilsvarende værdi ρ_0 af den centrale massefylde, samt tidsskalaen $\tau_{^2\mathrm{D}}$ for ^{2}D-forbrænding i stjernens centrum.

e) Vi betragter tilfælde nær det i spørgsmål d) betragtede, og approksimerer $\langle \sigma v \rangle$ med

$$\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^n . \tag{5}$$

Bestem eksponenten n. (Bemærk at n ikke må forveksles med det polytrope index, der for den betragtede model er 3/2.)

f) Vi antager igen at $X_{^2\mathrm{D}} = 10^{-4}$ og $X = 0.7$. Vis, under den i spørgsmål e) benyttede approximation, at energiproduktionshastigheden per masseenhed er af formen

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \left(\frac{T}{T_0} \right)^n , \tag{6}$$

og bestem konstanten ϵ_0.

g) Vis, under antagelserne i spørgsmål f), at det samlede bidrag L_{nuc} fra ^{2}D-forbrændingen til stjernens lysstyrke kan skrives

$$\frac{L_{\mathrm{nuc}}}{L_{\mathrm{s},\odot}} = L_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3-n} , \tag{7}$$

og bestem L_0; her er R_0 stjernens radius på det tidspunkt hvor den centrale temperatur, som i spørgsmål d), er $T_0 = 2 \times 10^6\,\mathrm{K}$. Det oplyses at

$$\xi_1^{-3} \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta_{3/2}(\xi)^{n+3} \mathrm{d}\xi = 3.085 \times 10^{-3} , \tag{8}$$

hvor $\theta_{3/2}$ er Lane-Emden funktionen af index 3/2, og $\xi = \xi_1$ er det punkt hvor $\theta_{3/2}(\xi) = 0$.

h) Vi antager at stjernerne på Hayashi sporet har den effektive temperatur $T_{\mathrm{eff}} = 4000\,\mathrm{K}$. Find, ud fra ligning (7), radius og den samlede lysstyrke L_s af stjernen, hvis det antages at $L_{\mathrm{nuc}} = L_s$.

OPGAVE 1

Vi betragter en stjerne på den røde kæmpegren, inden heliumantændelse. Stjernen antages at have massen $M = 1M_\odot$; under stjernens udvikling antages den effektive temperatur $T_{\rm eff} = 4000\,\mathrm{K}$ at være konstant, mens lysstyrken ændres. Stjernens grundstofsammensætning er givet ved $X = 0.7$, $Z = 0.02$.

a) Gør kort rede for den indre struktur af en sådan stjerne. Hvor sker energiproduktionen?

Vi antager at den ydre konvektionszone har en adiabatisk temperaturgradient,

$$\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln P} = \nabla_{\rm ad} = 2/5 \ , \tag{1}$$

hvor T er temperaturen og P er trykket. Tilstandsligningen antages givet ved idealgasloven.

b) Vis at sammenhængen mellem massefylden ρ og temperaturen T i konvektionszonen kan skrives

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \ , \tag{2}$$

hvor ρ_0 og T_0 er værdierne af ρ og T ved toppen af konvektionszonen.

c) Antag at opaciteten κ er givet ved

$$\kappa = \kappa_0 \rho^\alpha T^{-\beta} \ , \tag{3}$$

hvor κ_0, α og β er konstanter. Vis at temperaturen $T_{\rm cz}$ i bunden af konvektionszonen tilfredsstiller

$$\left(\frac{T_{\rm cz}}{T_0}\right)^{(3/2)(1-\alpha)+\beta} = \frac{5}{2}\frac{3k}{16\pi a\tilde{c}Gm_{\rm u}\mu}\frac{L}{m_{\rm cz}}\kappa_0\frac{\rho_0^{\alpha+1}}{T_0^{3+\beta}} \ ; \tag{4}$$

her er k Boltzmanns konstant, a er strålingstæthedskonstanten, $\tilde{c}$ lyshastigheden, $m_{\rm u}$ atommasseenheden, μ middelmolekylvægten, L lysstyrken i bunden af konvektionszonen, og $m_{\rm cz}$ massen inden for konvektionszonen.

d) Vi antager at $T_0 = T_{\rm eff}$, samt at $\rho_0 = 10^{-7}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Endvidere er opaciteten bestemt ved $\kappa_0 = 4 \times 10^{15}$ (i cgs enheder), $\alpha = 0.2$ og $\beta = 2$ (disse værdier er fundet ud fra fits til de relevante opacitetstabeller). Endelig er stjernens lysstyrke $L = 100L_\odot$; vi antager at der ikke sker nogen energiproduktion i konvektionszonen, og vi negligerer massen i konvektionszonen, så $m_{\rm cz} = 1M_\odot$. Udregn $T_{\rm cz}$.

e) Antag at ρ_0 varierer som $g_{\mathrm{s}}^{-1/2}$ under stjernens udvikling, hvor g_{s} er tyngdeaccelerationen på stjernens overflade. Argumenter for at T_{cz} vokser med stjernens alder, under udviklingen på den røde kæmpegren.

Antag fortsat at vi kan negligere massen i konvektionszonen. Ved hjælp af ligningen for hydrostatisk ligevægt kan man vise at temperaturen i konvektionszonen afhænger af r som

$$T = T_0 + \frac{2}{5}\frac{GM\mu m_{\mathrm{u}}}{kR}\left(\frac{R}{r} - 1\right) , \tag{5}$$

hvor R er stjernens overfladeradius. (Denne relation skal ikke eftervises.)

f) Lad r_{cz} være værdien af r i bunden af konvektionszonen; bestem r_{cz}/R for tilfældet betragtet i spørgsmål d). (Vi kan negligere T_0 sammenlignet med T_{cz}.)

g) Vi kan vurdere gyldigheden af antagelsen om at $m_{\mathrm{cz}} \simeq M$ ved at bestemme et skøn over massen i konvektionszonen. Vi antager at $T(r)$ er givet ved ligning (5), hvor vi negligerer T_0, således at T kan skrives

$$T = \hat{T}\left(\frac{R}{r} - 1\right) , \qquad \text{hvor} \quad \hat{T} = \frac{2}{5}\frac{GM\mu m_{\mathrm{u}}}{kR} . \tag{6}$$

Vis ved hjælp af denne ligning, samt ligning (2), at massen i konvektionszonen er givet ved

$$M - m_{\mathrm{cz}} = 4\pi\rho_0 R^3 \left(\frac{\hat{T}}{T_0}\right)^{3/2} f(r_{\mathrm{cz}}/R) , \tag{7}$$

hvor

$$f(x) = \int_x^1 \frac{(x' - x'^2)^{3/2}}{x'} \mathrm{d}x' . \tag{8}$$

h) Beregn $1 - m_{\mathrm{cz}}/M$ for tilfældet betragtet i spørgsmål d) og f). Integralet i ligning (8) er ikke så simpelt; det opgives at en fornuftig approksimation er

$$f(x) \simeq \frac{2}{5}\frac{(1-x)^{5/2}}{1 + (1-x)^2} . \tag{9}$$

OPGAVE 2

For et Univers i adiabatisk ekspansion gælder *loven om lokal energibevarelse* på formen

$$dU = -pdV,$$

hvor p er trykket, $V = R^3$ er et karakteristisk volumen ($R(t)$ betegner skalafaktoren), og den tilhørende energi $U = \rho c^2 R^3$, hvor ρc^2 er energitætheden.

(a) Vis, at energibevarelsesligningen kan omskrives på formen

$$\frac{d\rho}{\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)} = -3\frac{dR}{R}.$$

Antag at trykket er givet af en tilstandsligning på formen $p = w\rho c^2$, hvor w er en konstant, som ikke afhænger af tiden.

(b) Vis, at tætheden opfylder $\rho \propto R^{-3(1+w)}$.

Antag at Universet rummer tre komponenter, der hver især opfylder betingelserne i (b): Hvilemasse ($w = 0$), stråling ($w = 1/3$) og "vakuumenergi" ($w = -1$). Antag endvidere, at Universet er fladt ($k = 0$), samt at hvilemasse, stråling og vakuumenergi idag bidrager med henholdsvis cirka 30%, 0.01% og 70% af den kritiske tæthed.

(c) Vis, at Universet har gennemgået en udvikling, hvor tætheden først var domineret af stråling, dernæst i en periode af hvilemasse, og til sidst af vakuumenergi.

(d) Ved hvilken rødforskydning (z) skiftede Universet fra hvilemasse-dominans til vakuumenergi-dominans?

(e) Vis, at skalafaktoren for $w > -1$ opfylder $R(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$, samt at $R(t) \propto \exp(Ht)$ med konstant H for $w = -1$, såfremt Universet kun rummede én og ikke tre komponenter.

(f) Giv et skøn over Universets alder på tidspunktet for skiftet mellem hvilemassedominans og vakuumenergi-dominans (kommentér dine antagelser/approximationer; der bedes ikke om en eksakt løsning af Friedmann-ligningerne, da den er ret kompliceret. Universets nuværende alder sættes til 14 milliarder år).

(g) Beskriv Universets fremtidige udvikling under antagelse af, at Universet indeholder de omtalte tre komponenter.

(h) I kursets gennemgang af Big Bang kernesyntese og galaksedannelse har vi set bort fra et eventuelt vakuumenergi-bidrag til tætheden. Er det en god eller en dårlig approximation i hvert af de to tilfælde? Begrund kort dit svar.

OPGAVE 1

Vi betragter tunge stjerner på alder-nul hovedserien, med masser over $10M_\odot$. Energiproduktionen kommer fra brintforbrænding. Stjernernes kemiske sammensætning er givet ved indholdet $X = 0.7$ af brint og $Z = 0.02$ af tunge grundstoffer, per masseenhed.

a) Argumentér for at brintforbrændingen overvejende sker ved CNO cyklen, og at stjernerne derfor har konvektive kerner.

Uden for den konvektive kerne antages energitransporten at ske ved stråling; opaciteten antages domineret af elektronspredning,

$$\kappa = \kappa_\mathrm{e} = 0.2(1 + X)\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}^{-1}\ .$$

b) Vis at temperaturgradienten $\nabla = \mathrm{d}\ln T/\mathrm{d}\ln P$ i området med strålingstransport er givet ved

$$\nabla = \nabla_\mathrm{r} = \frac{3\kappa_\mathrm{e} P}{16\pi ac\, G T^4}\frac{L}{m}\ ,$$

hvor P er trykket, a er strålingsenergitæthedskonstanten, c er lyshastigheden, G er gravitationskonstanten, L er lysstyrken i det betragtede punkt og m er massen inden for dette punkt.

Vi antager i hele opgaven at $L = L_\mathrm{s}$, hvor L_s er overfladelysstyrken. I de ydre dele af stjernen kan vi ydermere antage at $m = M$, stjernens samlede masse.

c) Vis at med disse antagelser tilfredsstiller T og P

$$T^4 = \frac{3\kappa_\mathrm{e}}{4\pi ac\, G}\frac{L}{M} P\ ,$$

og vis derudfra at i denne del af stjernen er

$$\nabla_\mathrm{r} = \frac{1}{4}\ .$$

I tunge stjerner er vi nødt til at tage hensyn til strålingstrykket. Vi skriver det totale tryk som $P = P_\mathrm{g} + P_\mathrm{r}$, hvor

$$P_\mathrm{g} = \frac{k\rho T}{\mu m_\mathrm{u}}\ , \qquad P_\mathrm{r} = \frac{1}{3} a T^4\ ;$$

her er k Boltzmanns konstant, ρ er massefylden, μ er middelmolekylvægten og m_u er atommasseenheden. Desuden indfører vi $\beta = P_\mathrm{g}/P$; det er klart at $P_\mathrm{r}/P = 1 - \beta$.

d) Vis at

$$1 - \beta = \frac{\kappa_\mathrm{e}}{4\pi c\,G}\frac{L}{M}$$

Argumenter for at β nødvendigvis er større end 0, og bestem derudfra en øvre grænse, i enheder af $L_\odot/M_\odot$, for L/M.

Vi betragter nu det indre af stjernen, hvor m ikke længere kan antages at være konstant.

e) Vis at massen m_c for den konvektive kerne kan skrives som

$$\frac{m_\mathrm{c}}{M} = \frac{\kappa_\mathrm{e}}{16\pi c\,G}\frac{L}{M}\frac{1}{(1-\beta_\mathrm{c})\nabla_\mathrm{ad}} \; ,$$

hvor $\nabla_\mathrm{ad} = (\partial \ln T/\partial \ln P)_\mathrm{ad}$ er den adiabatiske temperaturgradient og β_c er værdien af β på overgangen til den konvektive kerne.

For at bestemme variationen af m_c med stjernens masse antager vi følgende sammenhæng mellem masse og lysstyrke af de betragtede stjerner:

$$L = 5.7 \times 10^3 \left(\frac{M}{10 M_\odot}\right)^{2.6} L_\odot \; .$$

Endvidere antager vi at β_c tilfredsstiller

$$1 - \beta_\mathrm{c} = 0.04 \left(\frac{M}{10 M_\odot}\right)^{1.2} \; .$$

(Bemærk at disse relationer afviger fra de simple skøn udledt i *Lecture Notes*; de er fornuftige approksimationer for stjerner med masse mellem 10 og $50 M_\odot$.) Endelig må vi tage hensyn til at ∇_ad afhænger af β; vi kan approksimere denne afhængighed med

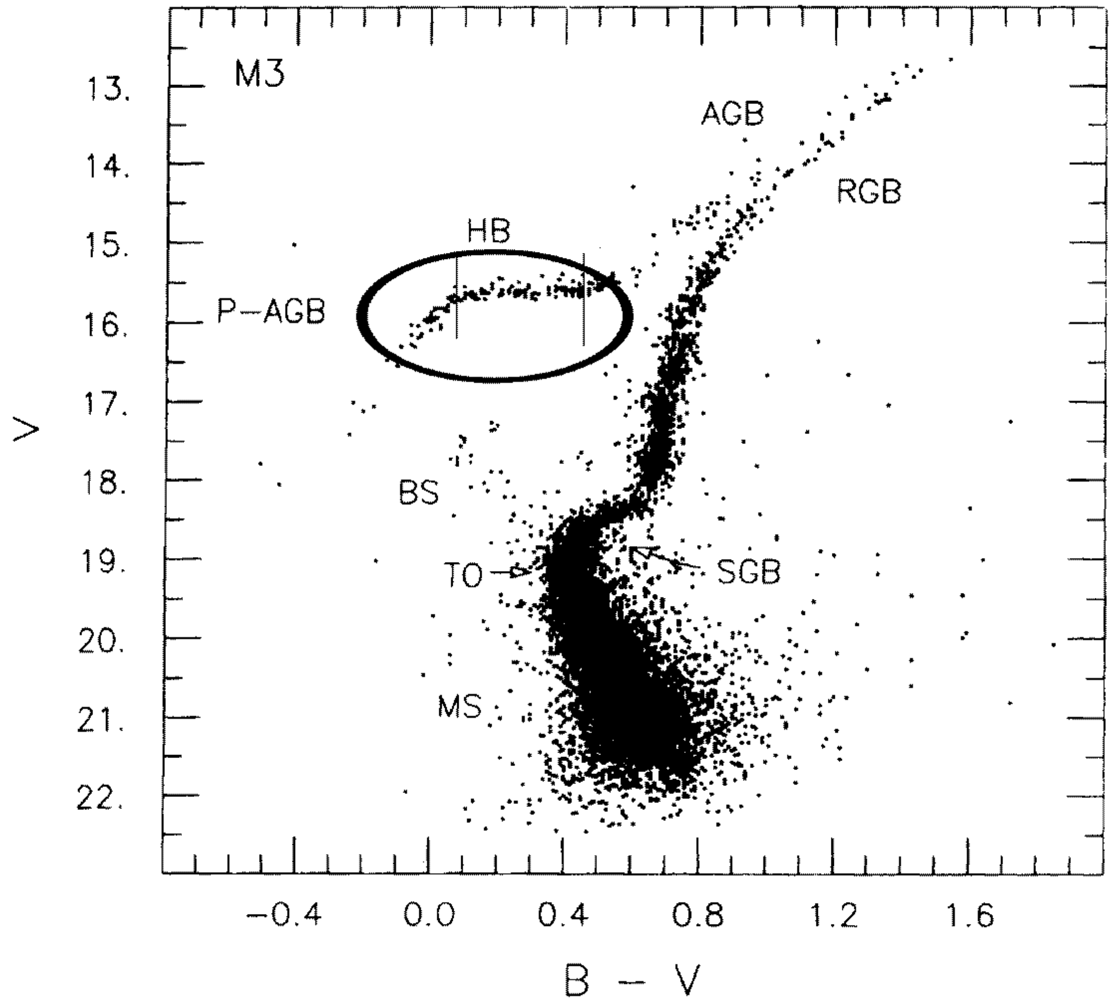
$$\nabla_\mathrm{ad} \simeq \frac{2}{5} - \frac{1}{2}(1-\beta) \; .$$

f) Vis at m_c/M er en voksende funktion af M.

g) Bestem m_c/M for $M = 10 M_\odot,\ 20 M_\odot,\ 30 M_\odot,\ 40 M_\odot,\ 50 M_\odot$.

Opgave 2 mangler indtil videre.

OPGAVE 1



Vi betragter horisontalgrensstjerner i den kugleformede stjernehob M3. Et farve-lysstyrkediagram af hoben er vist på figuren, hvor 'HB' markerer horisontalgrenen. Som bekendt drejer det sig om stjerner der har undergået heliumantændelse i et heliumflash, og hvor energiproduktionen sker ved en kombination af central heliumforbrænding og brintskalkildeforbrænding. Vi antager at udviklingseffekter efter heliumflashet kan negligeres. Vi er specielt interesserede i at forstå at stjernerne fordeler sig over et bredt område i B − V og dermed i effektiv temperatur.

Vi antager følgende sammenhæng mellem B − V og den effektive temperatur $T_{\rm eff}$:

$$T_{\rm eff} = \frac{8540\,{\rm K}}{{\rm B}-{\rm V}+0.865}\ .$$

Effekten af bolometrisk korrektion kan negligeres.

(a) Argumentér for at stjernernes overfladeradius aftager med aftagende B − V og dermed voksende effektiv temperatur på horisontalgrenen.

(b) Giv et skøn over forholdet mellem radius af stjernerne markeret med de to lodrette streger.

Vi antager at energitransporten sker ved stråling uden for brintskalkilden; opaciteten antages domineret af elektronspredning,

$$\kappa = \kappa_{\mathrm{e}} = 0.2(1 + X)\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}^{-1} \ ,$$

hvor X er brintindholdet. I dette område antager vi også at lysstyrken $L_r = L_{\mathrm{s}}$, overfladelysstyrken. Desuden negligerer vi massen indeholdt i dette område, så $M_r = M$, stjernens totale masse.

(c) Vis at

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P} = \frac{3\kappa_{\mathrm{e}}}{16\pi ac\,GT^3}\frac{L_{\mathrm{s}}}{M} \ ,$$

hvor T er temperaturen, P er trykket, a er strålingstæthedskonstanten, c er lyshastigheden, og G er gravitationskonstanten. Vis herudfra at

$$P = \frac{4\pi ac\,G}{3\kappa_{\mathrm{e}}}\frac{M}{L_{\mathrm{s}}}T^4 \ , \qquad (1)$$

hvor vi har negligeret tryk og temperatur på stjernens overflade.

Vi antager at tilstandsligningen er givet ved idealgasloven for en fuldstændig ioniseret gas, og at strålingstryk kan negligeres.

(d) Opskriv, ved hjælp af ligningen for hydrostatisk ligevægt, idealgasloven og ligning (1), en ligning for $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r$, hvor r er afstanden til stjernens centrum. Vis at denne ligning har løsningen

$$T = \frac{GM\mu m_{\mathrm{u}}}{4k}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \ , \qquad (2)$$

hvor μ er middelmolekylvægten, m_{u} er atomvægtenheden, k er Boltzmanns konstant og R er stjernens overfladeradius.

Som vist på figuren kan stjernernes lysstyrke antages at være den samme over en stor del af horisontalgrenen. Vi antager derfor at alle stjerner har samme struktur i brintskalkilden og i de dele der ligger inden for skalkilden. Alle stjerner antages også at have samme masse, $M = 0.5M_\odot$, og den kemiske sammensætning af området uden for skalkilden er givet ved $X = 0.75$ og et indhold $Z = 0.001$ af tunge grundstoffer.

(e) Bidraget fra skalkilden til stjernernes lysstyrke kræver at temperaturen T_{sk} i skalkilden er $2 \times 10^7\,\mathrm{K}$. Bestem radius r_{sk} af skalkilden, i enheder af Solens radius $R_\odot$, hvis det antages at $r_{\mathrm{sk}} \ll R$.

Variationen i stjernernes effektive temperatur langs horisontalgrenen antages normalt at skyldes varierende grader af massetab i tidligere udviklingsfaser, specielt på den røde kæmpegren og under heliumflashet. Vi kan undersøge denne hypotese ved at bestemme massen Δm_{env} af det område af stjernen, der ligger uden for skalkilden.

(f) Vis ud fra ligning (1) og idealgasloven at

$$\rho = BT^3\,, \qquad \text{hvor} \quad B = \frac{4\pi ac\,G\mu m_{\mathrm{u}}}{3\kappa_{\mathrm{e}}k}\frac{M}{L_{\mathrm{s}}}\,.$$

Vis herudfra at

$$\Delta m_{\mathrm{env}} = 4\pi B\left(\frac{GM\mu m_{\mathrm{u}}}{4k}\right)^3\left[-\frac{11}{6} - \ln\left(\frac{r_{\mathrm{sk}}}{R}\right) + 3\left(\frac{r_{\mathrm{sk}}}{R}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{r_{\mathrm{sk}}}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r_{\mathrm{sk}}}{R}\right)^3\right]\,,$$

hvor ln er den naturlige logaritme.

(g) Vi antager at alle stjerner på horisontalgrenen har lysstyrken $L_{\mathrm{s}} = 40L_\odot$, hvor $L_\odot$ er Solens lysstyrke. Bestem $\Delta m_{\mathrm{env}}/M_\odot$ for $T_{\mathrm{eff}} = 10\,000\,\mathrm{K}$, $T_{\mathrm{eff}} = 8\,000\,\mathrm{K}$ og $T_{\mathrm{eff}} = 6\,000\,\mathrm{K}$.

OPGAVE 2

Vi betragter et tænkt Univers, der alene indeholder en substans med energitæthed $\epsilon(t)$ (hvor t er tiden) med trykket givet ved tilstandsligningen $P = -\epsilon/3$. Skalafaktoren betegnes som sædvanlig $a(t)$, og vi sætter $a(t_0) \equiv a_0 \equiv 1$, hvor t_0 er det nuværende tidspunkt.

(a) Bestem $\epsilon(a)$ udtrykt ved ϵ_0 og a.

(b) Vis at $\dot{a} \equiv \mathrm{d}a/\mathrm{d}t = K$, hvor K er en konstant, og udtryk konstanten K ved naturkonstanter, ϵ_0, samt krumningsradius R_0.

(c) Bestem $a(t)$, og beregn ϵ_0 og H_0 (Hubble-parameteren til tiden t_0) under forudsætning af at Universets nuværende alder er 13.7 milliarder år, samt at Universet har en uendelig stor krumningsradius.

(d) Bestem horisontafstanden $d_{\mathrm{hor}}(t)$ som funktion af tiden og kommentér resultatet.

(e) Gør kort rede for den tidslige udvikling i en kosmologisk model som den beskrevne og beskriv kort nogle observationer, der stemmer med og/eller er i modstrid med denne model.

(f) Gør kort rede for, hvorledes udviklingen kvalitativt ville ændres i forhold til den beskrevne model, hvis der udover den beskrevne substans adderes yderligere 1) en lille smule "almindeligt" stof med tilstandsligning $P = 0$; eller i stedet 2) en lille smule "kosmologisk konstant" med tilstandsligning $P = -\epsilon$.

OPGAVE 1

Vi betragter den første generation af stjerner, dannet af den stofsammensætning der resulterede fra kernesyntesen i Big Bang. Vi er specielt interesseret i nydannede stjerner, hvor energiproduktionen sker ved brint-fusion. Stjernernes indhold af brint, $X = 0.77$, antages at være konstant. Det antages at opaciteten er domineret af elektronspredning. Sammenhængen mellem masse og overfladelysstyrke antages givet ved

$$L_{\mathrm{s}} = 3 \times 10^{34} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3 \left(\frac{\mu}{0.62}\right)^4 \frac{1.7}{1+X} \, \mathrm{erg\,s^{-1}} \ ,$$

hvor M er stjernens masse, $M_\odot$ er solmassen og μ er middelmolekylvægten.

(a) Argumenter for at vi kan antage at der for indholdet Z af tunge grundstoffer gælder at $Z \simeq 0$ i de nydannede stjerner. Argumenter også for at energiproduktionen i disse stjerner udelukkende skyldes pp-kæderne, samt at man derfor kunne forvente at stjernerne har strålingstransport i de centrale dele.

(b) Vi betragter en stjerne med massen $M = 5M_\odot$ og den effektive temperatur $T_{\mathrm{eff}} = 21500\,\mathrm{K}$. Find stjernens lysstyrke og radius.

Vi er specielt interesseret i forholdene i de centrale dele af stjernen, hvor energiproduktionen finder sted. Her approksimerer vi temperaturen T og massefylden ρ med

$$T = T_{\mathrm{c}}(1-q) \ , \qquad \rho = \rho_c(1-q)^3 \ ,$$

hvor T_{c} og ρ_{c} er de centrale værdier af T og ρ, og $q = M_r/M$, hvor M_r er massen inden for det betragtede punkt. Endvidere antager vi at energiproduktionshastigheden ved pp kæderne kan approksimeres ved

$$\epsilon_{\mathrm{pp}} = \epsilon_0 \rho X^2 T_6^4 \ ,$$

hvor $\epsilon_0 = 10^{-5}$ (i cgs enheder) og $T_6 = T/(10^6\,\mathrm{K})$.

(c) Vis at stjernens overfladelysstyrke kan findes som

$$L_{\mathrm{s}} = \frac{1}{8} M \epsilon_0 \rho_{\mathrm{c}} T_{\mathrm{c},6}^4 X^2 \ , \tag{1}$$

hvor $T_{\mathrm{c},6} = T_{\mathrm{c}}/(10^6\,\mathrm{K})$.

Vi antager at forholdet mellem ρ_{c} og den gennemsnitlige massefylde $\bar{\rho} = M/(4\pi R^3/3)$ er givet ved værdien for en polytrop af indeks 3,

$$\frac{\rho_{\mathrm{c}}}{\bar{\rho}} = 54.18 \ .$$

(d) Bestem ρ_c og find herudfra T_c, ved hjælp af ligning (1).

(e) Vi kan nu checke formodningen om at den centrale dele er konvektivt stabile. Som bekendt kræver det at

$$\nabla_r = \frac{3k}{16\pi ac\, G m_u} \frac{\kappa_e}{\mu} \frac{L_r(r)}{M_r(r)} \frac{\rho}{T^3} < 2/5 \;, \tag{2}$$

hvor vi har antaget idealgasloven; her er k Boltzmann's konstant, a er strålingsenergitæthedskonstanten, c er lyshastigheden, G er gravitationskonstanten, m_u er atommasseenheden, og κ_e er opaciteten fra elektronspredning. Argumenter for ∇_r har sin største værdi i stjernens centrum, og vis at denne værdi tilfredsstiller uligheden (2).

På grund af den relativt høje centraltemperatur sker der en begrænset energiproduktion på grund af heliumforbrænding, ved triple-alfa processen, selv i denne udviklingsfase. Energiproduktionshastigheden ved denne reaktion kan approksimeres ved

$$\epsilon_{3\alpha} = 5 \times 10^{11} \rho^2 Y^3 T_8^{41} \;, \tag{3}$$

i cgs enheder, hvor Y er heliumindholdet og $T_8 = T/(10^8\,\mathrm{K})$.

(f) Beregn $\epsilon_{3\alpha}$ i stjernens centrum og vis at den er meget mindre end energiproduktionen fra brintfusionen.

En anden effekt af heliumforbrændingen er dannelsen af ^{12}C; dermed er der mulighed for brintfusion ved CNO-cyklen. Vi approksimerer energiproduktionshastigheden ved CNO-cyklen med

$$\epsilon_{\mathrm{CNO}} = 8 \times 10^{-24} \rho X X_{\mathrm{CNO}} T_6^{20} \;,$$

i cgs enheder, hvor X_{CNO} er det samlede indhold af C, N og O, der kan approksimeres med mængden af ^{12}C produceret ved helium-fusionen. Produktionshastigheden af ^{12}C kan bestemmes ud fra ligning (3), hvor det opgives at hver produceret ^{12}C kerne svarer til frigivelse af 7.26 MeV.

(g) På grund af det voksende bidrag fra CNO-cyklen til energiproduktionen vokser den centrale energiproduktion og dermed den centrale værdi af ∇_r. Giv et skøn over hvor lang tid der går fra stjernens dannelse inden stjernen får en konvektiv kerne; det antages at alle andre størrelser end X_{CNO} er uændrede under denne del af stjernens udvikling. (Bemærk at dette tidsrum er så kort at stjernen i praksis må forventes at etablere en konvektiv kerne allerede under udviklingen før hovedserien.)

OPGAVE 2

I denne opgave vil vi kaste lys over Olbers paradoks.

(a) Forklar med egne ord, hvori Olbers paradoks består og hvilke antagelser, der ligger bag.

Betragt nu et støvdomineret (ω=0), fladt (κ=0) univers med Hubblekonstant H_0=70 km s^{-1} Mpc^{-2}.

(b) Vis, at i et sådant univers er skalafaktoren givet ved:

$$a(t) = (\frac{3}{2}H_0 t)^{2/3}$$

Hvad er universets alder t_0 i denne model?

(c) Hvad er horisontafstanden i et sådant univers? Forklar hvordan svaret hjælper til at løse Olbers paradoks.

Vi vil nu beregne, hvor stor energitætheden fra stjernelys er i denne model. Lad $\alpha(t)$ betegne den energi, der udstråles fra stjerner per volumen i tiden dt. Den udstrålede energi dQ i et volumen V er altså:

$$\mathrm{d}Q = \alpha(t)V\mathrm{d}t$$

(d) Brug termodynamikkens 1. hovedsætning for denne strålingskomponent ($\mathrm{d}Q = \mathrm{d}(\epsilon_\gamma V) + P_\gamma \mathrm{d}V, P_\gamma = \frac{1}{3}\epsilon_\gamma$) til at vise:

$$\mathrm{d}(V^{4/3}\epsilon_\gamma) = V^{1/3}\mathrm{d}Q = \alpha(t)V^{4/3}\mathrm{d}t$$

(e) Brug resultatet fra (d) samt $V \propto a(t)^3$ til at vise:

$$a(t_0)^4\epsilon_\gamma(t_0) = a(t_1)^4\epsilon_\gamma(t_1) + \int_{t_1}^{t_0} \alpha(t)a(t)^4\mathrm{d}t$$

Antag, at strålingen udsendes af galakser med konstant luminositet L og en antalstæthed n, der er konstant i medfølgende koordinater. Dermed er $\alpha(t_0) = n\,L$ og $\alpha(t) \propto a(t)^{-3}$. Antag endvidere, at $t_1 = 0$, $\epsilon_\gamma(t_1) = 0$ og $\alpha(t_0) = 2 \times 10^8 L_\odot\,\mathrm{Mpc}^{-3}$ (jvf. afsnit 2.3 i Ryden: Introduction to Cosmology).

(f) Brug resultatet fra (b) og (e) til at vise $\epsilon_\gamma(t_0) = \frac{2}{5}\frac{\alpha(t_0)}{H_0}$. Sammenlign med den observerede værdi på $\epsilon_\gamma(t_0) \approx 2 - 7 \times 10^{-15}\,\mathrm{J\,m^{-3}}$. Hvilke antagelser kan være forkerte? Hvor stor er $\epsilon_\gamma(t_0)$ sammenlignet med energitætheden i den kosmiske mikrobølge-baggrundstråling?

OPGAVE 1

Vi betragter en rød kæmpestjerne. Stjernen er observeret at have en parallakse $\pi = 0.0069''$, og en tilsyneladende bolometrisk størrelsesklasse $m_{\rm bol} = 5.0$. Vi negligerer interstellar rødfarvning. Ud fra analyse af stjernens spektrum er tyngdeaccelerationen g bestemt til $\log_{10} g = 1.5$, i cgs enheder. Den generelle intensitetsfordeling I_λ i stjernens spektrum, som funktion af bølgelængden λ, kan approksimeres med en Planck funktion; I_λ har et maksimum ved $\lambda = 8300$Å. Det opgives endvidere at solens lysstyrke er $L_\odot = 3.846 \times 10^{33}\,{\rm erg\,s^{-1}}$ og solens absolutte bolometriske størrelsesklasse er $M_{{\rm bol},\odot} = 4.75$. Grundstofsammensætningen af stjernen bestemmes til et indhold per masseenhed af brint og tunge grundstoffer på $X = 0.7$ og $Z = 0.02$.

(a) Vis ud fra disse oplysninger at stjernens lysstyrke L, effektive temperatur $T_{\rm eff}$, radius R og masse M er

$$L = 166.8 L_\odot\ , \quad T_{\rm eff} = 3491\,{\rm K}\ , \quad R = 35.38 R_\odot\ , \quad M = 1.445 M_\odot\ .$$

hvor $M_\odot$ er solens masse.

Sådanne røde kæmpestjerner er karakteriseret ved en dyb ydre konvektionszone. Vi skal undersøge egenskaber ved denne konvektionszone.
Som bekendt er betingelsen for konvektion karakteriseret ved temperaturgradienten $\nabla \equiv {\rm d}\ln T/{\rm d}\ln P$, hvor T er temperaturen og P er trykket; der er konvektion når

$$\nabla_{\rm rad} = \frac{3}{16\pi a c G}\frac{\kappa P}{T^4}\frac{L_r}{M_r} > \nabla_{\rm ad}\ . \qquad (1.1)$$

Her er a strålingsenergitæthedskonstanten, c er lyshastigheden, G er gravitationskonstanten, κ er opaciteten, og L_r og M_r er luminositet ved, og massen inden for, det betragtede punkt. Vi antager i hele opgaven at tilstandsligningen er givet ved en fuldstændig ioniseret idealgas, uden strålingstryk, således at $\nabla_{\rm ad} = 2/5$.
Vi betragter først forholdene i stjernens fotosfære, karakteriseret som det punkt hvor $T = T_{\rm eff}$. Man kan vise at forholdene ved fotosfæren er karakteriseret ved at trykket er givet ved

$$P_{\rm ph} = \beta \frac{g_{\rm ph}}{\kappa_{\rm ph}}\ , \qquad (1.2)$$

hvor β er en konstant, og $g_{\rm ph}$ og $\kappa_{\rm ph}$ er tyngdeacceleration og opacitet i fotosfæren. Vi antager her at $\beta = 2.2$.

(b) Vis at med denne antagelse er der konvektion ved stjernens fotosfære.

Vi antager at opaciteten er givet som

$$\kappa = \kappa_0 \rho \left[\left(\frac{T}{T_{\rm eff}}\right)^{-\nu_{\rm e}} + \left(\frac{T}{T_{\rm i}}\right)^{-\nu_{\rm i}} \right]^{-1}\ , \qquad (1.3)$$

hvor ρ er massefylden, $\kappa_0 = 1.83 \times 10^5$, i cgs enheder, $\nu_\mathrm{e} = 6$, $\nu_\mathrm{i} = -3.5$, og $T_\mathrm{i} = 10^6\,\mathrm{K}$. Bemærk at for $T \ll T_\mathrm{i}$ dominerer det første led i [...], så $\kappa \propto \rho T^{\nu_\mathrm{e}}$; for $T \gg T_\mathrm{eff}$ dominerer det andet led i [...], og $\kappa \propto \rho T^{-3.5}$, svarende til Kramers formel.

(c) Benyt ligning (1.2), idealgasloven samt udtrykket for opaciteten til at bestemme tryk og massefylde, P_ph og ρ_ph, i fotosfæren.

(d) Vi antager at konvektionszonen har en adiabatisk temperaturgradient overalt,

$$\nabla = \nabla_\mathrm{ad} = 2/5 \; .$$

Vis at i konvektionszonen er

$$P = K_1 T^{5/2} \; , \qquad P = K_2 \rho^{5/3} \; , \qquad \rho = K_3 T^{3/2} \; , \tag{1.4}$$

hvor K_1, K_2 og K_3 er konstanter.

(e) Vi antager at vi kan negligere massen og energiproduktionen i konvektionszonen, således at $M_r = M$, $L_r = L_\mathrm{s}$, i ligning (1.1), hvor L_s er overfladelysstyrken. Vis at betingelsen for konvektiv ustabilitet kan skrives

$$\frac{16\pi acG}{3} \frac{\mu m_\mathrm{u}}{k} \frac{M}{L_\mathrm{s}} \frac{T_\mathrm{eff}^3}{\kappa_0 \rho_\mathrm{ph}^2} \left[\left(\frac{T}{T_\mathrm{eff}} \right)^{-\nu_\mathrm{e}} + \left(\frac{T}{T_\mathrm{i}} \right)^{-\nu_\mathrm{i}} \right] < 5/2 \; , \tag{1.5}$$

hvor μ er middelmolekylvægten, m_u er atommasseenheden og k er Boltzmanns konstant, og bestem temperaturen T_bcz i bunden af konvektionszonen.

Strukturen af konvektionszonen kan bestemmes ved at løse ligningen for hydrostatisk ligevægt, hvor vi fortsat antager at $M_r = M$. Det gøres bekvemt ved at betragte størrelsen $u = P/\rho$, der er nært forbundet med temperaturen.

(f) Vis at

$$u = u_\mathrm{ph} + \frac{2}{5} GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \; , \tag{1.6}$$

hvor u_ph er værdien af u i fotosfæren. Benyt dette udtryk, samt resultatet af spørgsmål (e), til at bestemme den relative radius r_bcz/R ved bunden af konvektionszonen.

(g) Diskuter kort og kvalitativt den mulige struktur af de centrale dele af stjernen, inden for konvektionszonen, samt stjernens videre udvikling, afhængig af den antagne centrale struktur.

OPGAVE 2

Vi betragter Universets struktur umiddelbart efter rekombinationen, som afspejlet i den kosmiske mikrobølgebaggrundsstråling (CMB), for forskellige modeller af Universets struktur. Vi antager at den sidste spredning ('last scattering') fandt sted ved en rødforskydning $z_{\rm s} = 1100$, for alle de betragtede modeller. Et vigtigt aspekt i det observerede CMB-spektrum $\Delta_T(l)$ er positionen $l_{\rm max}$ af den første top, eller den tilsvarende vinkeludstrækning $\theta_{\rm max} = 180^\circ / l_{\rm max}$ af de tilsvarende fluktuationer. Man kan vise at den tilsvarende fysiske udstrækning $\ell_{\rm max}$ er givet ved den maksimale bølgelængde $\lambda_{\rm max}$ af lydbølger lige inden rekombinationen.

(a) Argumenter kvalitativt for at $\lambda_{\rm max}$ er højst af størrelsesordenen Hubblelængden $\ell_{\rm H} = c/H(z_{\rm s})$, hvor c er lyshastigheden og $H(z_{\rm s})$ er Hubblekonstanten ved $z_{\rm s}$.

I det følgende antager vi at $\ell_{\rm max} = \ell_{\rm H}$. Bemærk også at vi har relationen

$$\theta_{\rm max} = \frac{\ell_{\rm max}}{d_{\rm A}(z_{\rm s})} \tag{2.1}$$

mellem $\ell_{\rm max}$ og $\theta_{\rm max}$ (udtrykt i radian), hvor $d_{\rm A}(z_{\rm s})$ er vinkeldiameter-afstanden svarende til $z_{\rm s}$. Da både $H(z_{\rm s})$ og $d_{\rm A}(z_{\rm s})$ afhænger af Universets egenskaber har vi hermed en måde til at benytte den observerede værdi af $\theta_{\rm max}$ til at lægge bånd på disse egenskaber.
Vi betragter først, som tilfælde (I), et urealistisk Univers, hvor tætheden af stof i enheder af den kritiske tæthed på det nuværende tidspunkt, $\Omega_{\rm m,0}$, er meget mindre end 10^{-3}, og hvor bidragene fra stråling og kosmologisk konstant negligeres, så $\Omega_{\rm r,0} = \Omega_{\Lambda,0} = 0$.

(b) Argumenter for at med disse antagelser er Universets krumning $\kappa = -1$, samt for at leddet i tætheden kan negligeres i Friedmann-ligningen for $z < z_{\rm s}$. Vis også at løsningen til Friedmann-ligningen giver

$$a = \frac{t}{t_0}\ , \qquad t_0 = \frac{1}{H_0}\ , \qquad R_0 = \frac{c}{H_0}\ , \tag{2.2}$$

hvor t_0 er Universets nuværende alder, H_0 er den nuværende værdi af Hubble-konstanten, og R_0 er den nuværende værdi af krumningsradien.

(c) Vis at den nuværende egenafstand til et punkt svarende til den sidste spredning er givet ved

$$r(z_{\rm s}) = \frac{c}{H_0} \ln(1 + z_{\rm s})\ , \tag{2.3}$$

samt at den tilsvarende vinkeldiameter-afstand er

$$d_{\rm A}^{\rm (I)} = \frac{1}{2}\frac{c}{H_0}\left[1 - \frac{1}{(1+z_{\rm s})^2}\right] \tag{2.4}$$

(husk at $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$).

Som tilfælde (II) betragter vi et fladt Univers (med $\kappa = 0$), der er hvilemassedomineret, så $\Omega_{\mathrm{m},0} = 1$, $\Omega_{\mathrm{r},0} = \Omega_\Lambda = 0$. Her gælder som bekendt at

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} , \qquad t_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0} . \tag{2.5}$$

(d) Vis at den nuværende afstand til et punkt svarende til den sidste spredning i dette tilfælde er givet ved

$$r(z_\mathrm{s}) = 2\frac{c}{H_0}\left[1 - \frac{1}{(1+z_\mathrm{s})^{1/2}}\right] , \tag{2.6}$$

samt at den tilsvarende vinkeldiameter-afstand er

$$d_\mathrm{A}^{(\mathrm{II})} = \frac{2}{1+z_\mathrm{s}}\frac{c}{H_0}\left[1 - \frac{1}{(1+z_\mathrm{s})^{1/2}}\right] . \tag{2.7}$$

Som tilfælde (III) betragter vi Rydens 'Benchmark Universe', med $\Omega_{\mathrm{m},0} = 0.3$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$. Her kan løsningen ikke findes analytisk, men numeriske beregninger viser at

$$d_\mathrm{A}^{(\mathrm{III})}(z) \to \frac{3.24}{z}\frac{c}{H_0} \quad \text{for} \quad z \to \infty . \tag{2.8}$$

For $z_\mathrm{s} = 1100 \gg 1$ har vi derfor sammenfattende til en god approksimation at

$$\begin{aligned} d_\mathrm{A}^{(\mathrm{I})} &\simeq \frac{1}{2}\frac{c}{H_0} && \text{tilfælde (I)} \\ d_\mathrm{A}^{(\mathrm{II})} &\simeq \frac{2}{z_\mathrm{s}}\frac{c}{H_0} && \text{tilfælde (II)} \\ d_\mathrm{A}^{(\mathrm{III})} &\simeq \frac{3.24}{z_\mathrm{s}}\frac{c}{H_0} && \text{tilfælde (III)} \end{aligned}$$

For at bestemme θ_max for de forskellige tilfælde ud fra

$$\theta_\mathrm{max} = \frac{\ell_\mathrm{H}}{d_\mathrm{A}} = \frac{c}{d_\mathrm{A}(z_\mathrm{s})H(z_\mathrm{s})} \tag{2.9}$$

mangler vi at finde $H(z_\mathrm{s})$.

(e) Vis at i tilfælde (I) er

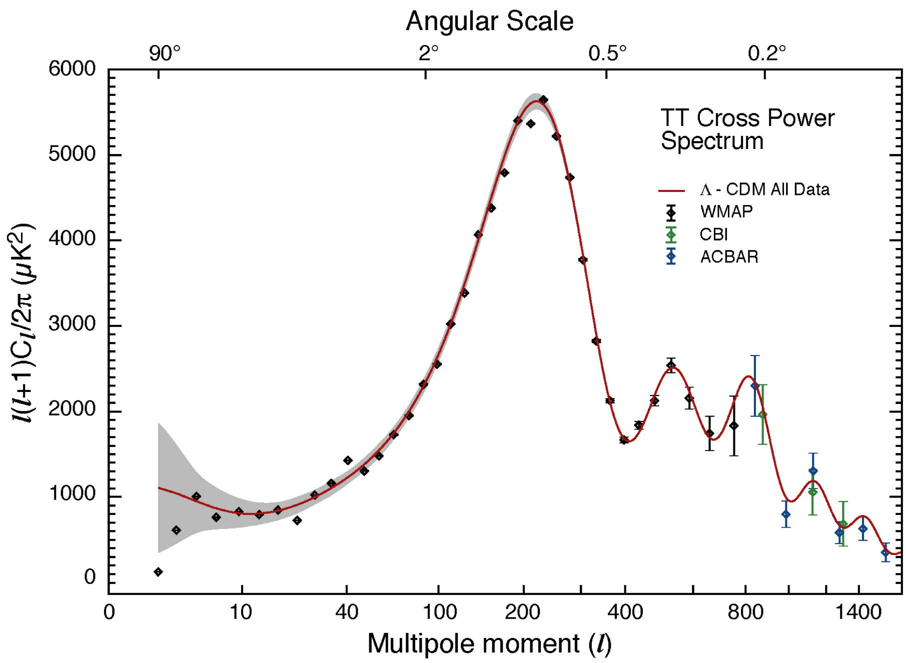
$$H^{(\mathrm{I})}(z_\mathrm{s}) = H_0(1+z_\mathrm{s}) , \tag{2.10}$$

og at $H^{(\mathrm{II})}(z_\mathrm{s})$ og $H^{(\mathrm{III})}(z_\mathrm{s})$, i tilfælde (II) og (III), kan findes ud fra

$$H(z_\mathrm{s})^2 = \Omega_{\mathrm{m},0}(1+z_\mathrm{s})^3 H_0^2 . \tag{2.11}$$

(f) Bestem ud fra de fundne relationer værdierne af θ_max, i grader, i de tre tilfælde, samt de tilsvarende værdier af l_max.

(g) Figuren nedenfor viser det målte CMB spektrum fra WMAP satellitten. Overvej om disse observationer kan bruges til at udelukke en eller flere af de betragtede modeller. Er det konsistent med andre observationelle data vedrørende Universets struktur?



Spektrum af den kosmiske baggrundsstråling som observeret af WMAP. Bemærk den viste størrelse svarer til Δ_T^2, som defineret i Ryden, *Introduction to Cosmology*.

OPGAVE 1

Vi betragter den supernova, der eksploderede i den Store Magellanske Sky i 1987. Ud over at være den nærmeste observerede supernova i flere hundrede år er den speciel ved at der foreligger udmærkede observationer af stjernen inden den eksploderede. Den er derfor en glimrende mulighed for at teste modeller af supernovaers egenskaber.
Inden eksplosionen var stjernen en blå superkæmpe. Dens effektive temperatur var $T_{\rm eff} = 16\,500\,\mathrm{K}$, og den tilsyneladende visuelle størrelsesklasse var $m_{\rm V} = 12.29$. Afstanden til LMC er $5 \times 10^4\,\mathrm{pc}$. Det opgives at den bolometriske korrektion for en stjerne med den pågældende effektive temperatur er BC $= -1.71$.

(a) Bestem ud fra disse oplysninger stjernens radius inden eksplosionen, i enheder af Solens radius $R_\odot$.

Vi antager at strukturen af stjernen inden eksplosionen bestod af en kompakt kerne, med massen $M_{\rm ker} = 1 M_\odot$ (hvor $M_\odot$ er Solens masse) og radius $R_{\rm ker} = 10^5\,\mathrm{km}$ og en udstrakt ydre del; den samlede masse af stjernen var $15 M_\odot$. Eksplosionen sker ved at den centrale kerne kollapsede til en radius på $R_{\rm n} = 10\,\mathrm{km}$ under dannelse af en neutronstjerne. Strukturen af både den kompakte kerne og neutronstjernen antages givet ved at massefylden er lineære funktioner af afstanden r til centrum:

$$\rho_{\rm ker}(r) = \rho_{\rm c,ker}\left(1 - \frac{r}{R_{\rm ker}}\right) \qquad \text{kompakt kerne ,}$$

$$\rho_{\rm n}(r) = \rho_{\rm c,n}\left(1 - \frac{r}{R_{\rm n}}\right) \qquad \text{neutronstjerne .}$$

Her er $\rho_{\rm c,ker}$ og $\rho_{\rm c,n}$ de centrale massefylder af henholdsvis den oprindelig stjerne og neutronstjernen. (Bemærk at massefylden uden for kernen i den oprindelige stjerne er så lav at den kan negligeres.)

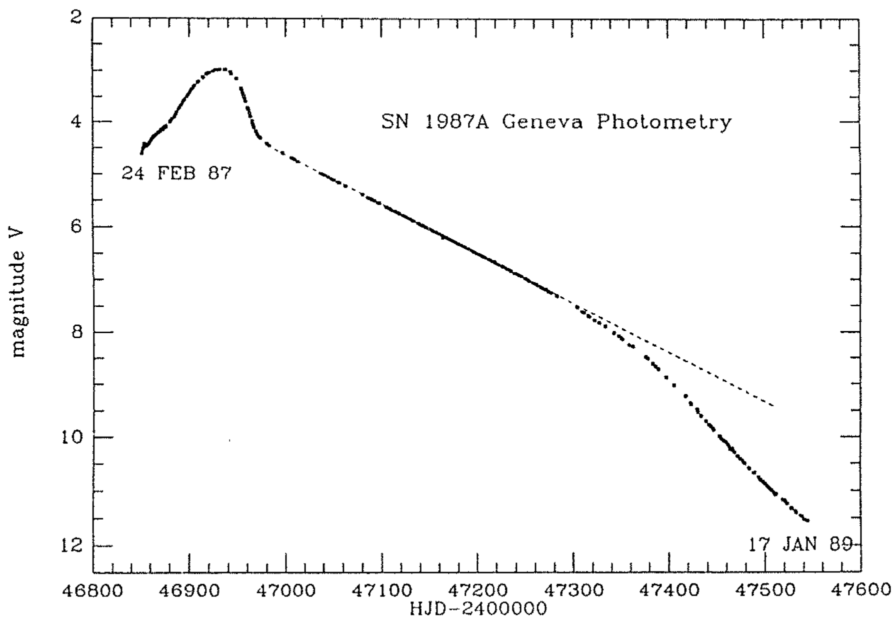
(b) Bestem den gravitationelle bindingsenergi der frigives ved kollapset. (Argumenter for at bindingsenergien i den oprindelige kerne kan negligeres.)

Inden kollapset antages stjernen at rotere med en periode på 12 døgn. Det antages endvidere at impulsmomentet er bevaret under kollapset af kernen til neutronstjernen.

(c) Bestem neutronstjernens rotationsperiode. Find også den rotationelle energi af neutronstjernen.

Spektroskopiske observationer af supernovaen viser en blåforskydning af brintlinien ved 6563 Å på 150 Å, Dette antages at repræsentere udvidelseshastigheden af den gassky, der resulterede fra eksplosionen.

(d) Bestem udvidelseshastigheden. Bestem også skyens kinetiske energi, hvis det antages at alt materialet uden for den kollapsende kerne bevæger sig med denne hastighed.



Lyskurve for supernovaen SN1987a i den Store Magellanske Sky. Abscissen er angivet i dage, på den såkaldte Julianske skala. Bemærk at den viste V-størrelsesklasse svarer til m_{V} anvendt i opgaveteksten.

Figuren viser lyskurven for supernovaen de første to år efter eksplosionen. Den maksimale lysstyrke, med $m_{\mathrm{V}} = 3$, blev nået ca. 100 dage efter eksplosionstidspunktet (der er tidsfæstet ud fra målinger af neutrinoer fra kollapset). Ved transformation af m_{V} til bolometrisk størrelsesklasse antages det at den samme bolometriske korrektion kan anvendes som for den oprindelige stjerne.

(e) Efter maximum udviser lyskurven to segmenter hvor størrelsesklassen varierer approksimativt lineært med tiden. Argumenter for at dette er konsistent med at energiproduktionen skyldes radioaktivt henfald af to kerner, med forskellig henfaldstid.

Som bekendt skyldes energiproduktionen følgende to reaktioner:

$$
\begin{aligned}
e^- + {}^{56}\mathrm{Ni} &\rightarrow {}^{56}\mathrm{Co} + \nu_{\mathrm{e}} \quad \tau_{1/2} = 6.1\,\mathrm{døgn}\ , \qquad Q = 2.11\,\mathrm{MeV}\ , \\
e^- + {}^{56}\mathrm{Co} &\rightarrow {}^{56}\mathrm{Fe} + \nu_{\mathrm{e}} \quad \tau_{1/2} = 77\,\mathrm{døgn}\ , \qquad Q = 4.57\,\mathrm{MeV}\ ,
\end{aligned}
$$

hvor $\tau_{1/2}$ er halveringstiden og Q er energiudsendelsen per henfald.

(f) Giv et skøn over massen (i solmasser) af ^{56}Ni der kræves for at producere en lysstyrke på $m_{\mathrm{V}} = 3$. Giv tilsvarende et skøn over massen af ^{56}Co der kræves nær det tidspunkt hvor denne reaktion begynder at dominere.

(g) Eksplosionen udsender en lyspuls der oplyser det omkringliggende interstellare stof i et såkaldt 'lysekko'. Antag at vi observationelt kan opløse et område med en vinkeludstrækning på 1" og og giv et skøn over hvor lang tid efter eksplosionen der gik før lysekkoet kunne opløses. Find tilsvarende hvor lang tid fra eksplosionen der går før vi observationelt kan opløse den sky der opstod ved eksplosionen, hvis den fortsætter med at udvide sig med den hastighed, der blev fundet i spørgsmål (d).

OPGAVE 2

Vi betragter et fladt univers ($\kappa = 0$) med nuværende Hubble-konstant $H_0 = 75\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. Formålet med opgaven er at undersøge muligheden for engang i fremtiden at observere en foton udsendt på det nuværende tidspunkt fra et punkt i den nuværende Hubble-afstand $d_{\mathrm{H},0} = c/H_0$, hvor c er lyshastigheden.

(a) Bestem $d_{\mathrm{H},0}$, i Mpc.

Vi betragter en foton der på det nuværende tidspunkt, $t = t_0$, er i den medfølgende koordinat $r(t_0) = d_{\mathrm{H},0}$. Fotonen når observatøren, med $r = 0$, til tiden $t = t_1$.

(b) Vis at fotonens medfølgende koordinat er givet ved

$$r - r(t_0) = -c \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}$$

hvor $a(t)$ er skalafaktoren til tiden t, som sædvanlig defineret så $a(t_0) = 1$. Vis herudfra at t_1 er bestemt ud fra

$$H_0 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = 1$$

Vi betragter nu et fladt massedomineret univers, med $\Omega_{\mathrm{CMB}} = \Omega_\Lambda = 0$. Som bekendt gælder i dette tilfælde at

$$a(t) = a(t_0) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}$$

(c) Vis at t_1 tilfredsstiller

$$1 = 2 \left[\left(\frac{t_1}{t_0} \right)^{1/3} - 1 \right] ,$$

og bestem herudfra t_1/t_0.

(d) Diskuter muligheden for at der rent faktisk vil være nogen her på Jorden til at detektere denne foton.

(e) Bestem rødforskydningen z_1 af fotonen, relativt til bølgelængden ved udsendelsestidspunktet.

Vi betragter nu et (måske urealistisk) fladt univers domineret af mørk energi med $w = -1$ (dvs. en kosmologisk konstant). I dette tilfælde kan Friedmann ligningen som bekendt skrives

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \ .$$

(f) Vis at i dette tilfælde når fotonen først til $r = 0$ efter uendelig lang tid.

OPGAVE 1

Vi betragter dobbeltstjernesystemet Sirius, med komponenterne Sirius A og Sirius B. Systemet har parallaksen $\pi = 0.38''$. Komponenternes øvrige observerede egenskaber er anført i følgende tabel:

	m_V	T_{eff}	$M/M_\odot$
Sirius A	-1.58	10 000 K	2.02
Sirius B	5.95	25 000 K	0.984

Her er m_V den tilsyneladende visuelle størrelsesklasse, T_{eff} er den effektive temperatur og M er massen, angivet i enheder af Solens masse $M_\odot = 1.989 \times 10^{33}\,\text{g}$.

(a) Find lysstyrken, i enheder af Solens lysstyrke $L_\odot$, af Sirius A og B. Det opgives at Solens absolutte visuelle størrelsesklasse er $M_{V,\odot} = 4.83$. Der ses bort fra bolometrisk korrektion.

(b) Find radius af Sirius A og Sirius B. Resultatet opgives både i cm og i enheder af Solens radius $R_\odot = 6.9599 \times 10^{10}\,\text{cm}$. Det opgives at Solens effektive temperatur er $T_{\text{eff}} = 5778\,\text{K}$. Bestem også middelmassefylden for de to komponenter.

(c) Argumenter for at Sirius B er en hvid dværg, og diskuter kort systemets udvikling indtil det nuværende tidspunkt. Det opgives at Sirius A stadig er i den centrale brintforbrændingsfase, samt at den gennemsnitlige afstand mellem de to komponenter er ca. 10 astronomiske enheder.

For at studere systemets udvikling i større detalje antager vi at Sirius B har en central del bestående af ^{12}C der omfatter næsten hele stjernens masse, og hvor trykket stammer fra fuldstændig degenererede elektroner. Denne centrale del har samme temperatur, T_c, overalt. Stjernens udstråling stammer fra afkøling af den termiske energi af ^{12}C-kernerne. Det opgives at der for en model af denne art gælder følgende sammenhæng mellem stjernens lysstyrke L og T_c:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{T_\text{c}}{T_\text{c}^{(\text{ref})}}\right)^{7/2} , \tag{9}$$

hvor $T_\text{c}^{(\text{ref})} = 1.2 \times 10^8\,\text{K}$.

(d) Bestem T_c for Sirius B.

(e) Vis at

$$\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = -\frac{L_\odot}{c_V M_\odot}\left(\frac{T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}^{(\mathrm{ref})}}\right)^{7/2} , \tag{10}$$

hvor c_V er varmefylden for ^{12}C-kernerne.

(f) Vis at den tid Δt_cool, det har taget at afkøle Sirius B til den nuværende lysstyrke og centrale temperatur, er givet ved

$$\Delta t_\mathrm{cool} = \frac{2}{5}\frac{c_V T_\mathrm{c}^{(\mathrm{ref})} M_\odot}{L_\odot}\left[\left(\frac{T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}^{(\mathrm{ref})}}\right)^{-5/2} - \left(\frac{T_{\mathrm{c},0}}{T_\mathrm{c}^{(\mathrm{ref})}}\right)^{-5/2}\right] , \tag{11}$$

hvor $T_{\mathrm{c},0}$ er den centrale temperatur i den hvide dværg umiddelbart efter dens dannelse.

(g) Bestem Δt_cool for Sirius B, hvis vi antager at $T_{\mathrm{c},0} = 3 \times 10^8\,\mathrm{K}$. Det opgives at ^{12}C-kernerne kan betragtes som en ideal gas, med varmefylde

$$c_V = \frac{3}{2}\frac{k}{12 m_\mathrm{H}} , \tag{12}$$

hvor k er Boltzmann's konstant og m_H er massen af et brintatom. Desuden opgives at Solens lysstyrke er $L_\odot = 3.846 \times 10^{33}\,\mathrm{erg\,s^{-1}}$.

OPGAVE 2

Vi betragter modeller af Universet der alle har den kritiske tæthed, dvs. $\Omega = 1$. Et hovedsigte er at undersøge observationer af 'standard-lyskilder', så som supernovaer af Type Ia. Vi benytter her sammenhængen

$$d_L = d_p(t_0)(1+z) , \tag{13}$$

beskrevet i Ryden, Kapitel 7, mellem lysstyrkeafstanden d_L og egenafstanden $d_p(t_0)$ til Universets nuværende alder t_0 for en stjerne med rødforskydningen z. I modsætning til Ryden benytter vi *ikke* rækkeudvikling af sammenhængen mellem afstand og rødforskydning.

(a) Den simpleste model er et stof-domineret Univers, med $\Omega_\mathrm{m} = 1$. Vis at egenafstanden til en stjerne med rødforskydning z er

$$d_p(t_0) = 3ct_0\left[1 - \left(\frac{t_\mathrm{e}}{t_0}\right)^{1/3}\right] = 3ct_0[1 - a(t_\mathrm{e})^{1/2}] = \frac{2c}{H_0}[1 - (1+z)^{-1/2}] , \tag{14}$$

hvor t_e er Universets alder da lyset fra stjernen blev udsendt, $a(t)$ er skalafaktoren, med $a(t_0) = 1$, H_0 er den nuværende Hubble-konstant, og c er lyshastigheden. Af ligning (13) følger så at

$$d_L = \frac{2c}{H_0}[1 + z - (1+z)^{1/2}] . \tag{15}$$

(b) Vis at for $z \ll 1$ gælder at

$$d_p(t_0) \simeq \frac{c}{H_0} z \; . \tag{16}$$

Som bekendt er denne model ikke i overensstemmelse med Universets observerede egenskaber. Observationerne indikerer en model, Ryden's 'Benchmark model', der har bidrag både fra stof og fra en kosmologisk konstant. I det nuværende Univers antages energitæheden $\Omega_{\rm m,0}$ af stof og $\Omega_{\Lambda,0}$ for den kosmologiske konstant, begge i enheder af den kritiske tæthed, givet ved

$$\Omega_{m,0} = 0.3 \; , \qquad \Omega_{\Lambda,0} = 0.7 \; . \tag{17}$$

Den kosmologiske konstant har altså på det nuværende tidspunkt den største effekt på Universets udvikling. Vi kan i denne opgave helt se bort fra bidraget fra strålingen.

(c) Gør kort rede for at bidraget fra stoffet dominerede i tidligere faser af Universets historie. Vis også bidraget til Friedmann ligningen fra stof og kosmologisk konstant havde samme størrelse til tiden $t = t_{\rm m,\Lambda}$, da skalafaktoren var

$$a(t_{\rm m,\Lambda}) = a_{\rm m,\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \; . \tag{18}$$

Løsningen til Friedmann-ligningen i det generelle tilfælde, med både stof og kosmologisk konstant, er ret kompliceret. Vi benytter derfor en ret grov approksimation, som dog giver nogenlunde fornuftige resultater: nemlig at

$$\begin{aligned} &\Omega_{\rm m} = 1 \; , \quad \Omega_\Lambda = 0 \qquad \text{for } t \le t_{\rm m,\Lambda} \; , a \le a_{\rm m,\Lambda} \; , \\ &\Omega_{\rm m} = 0 \; , \quad \Omega_\Lambda = 1 \qquad \text{for } t > t_{\rm m,\Lambda} \; , a > a_{\rm m,\Lambda} \; . \end{aligned} \tag{19}$$

(d) Vis at for $t > t_{\rm m,\Lambda}$ er

$$a(t) = \exp[H_0(t - t_0)] \; , \tag{20}$$

og for $t \le t_{\rm m,\Lambda}$ er

$$a(t) = a_{\rm m,\Lambda} \left(\frac{t}{t_{\rm m,\Lambda}} \right)^{2/3} \; , \tag{21}$$

hvor $t_{\rm m,\Lambda}$ er bestemt af

$$a_{\rm m,\Lambda} = \exp[H_0(t_{\rm m,\Lambda} - t_0)] \; . \tag{22}$$

(e) Vis herudfra at

$$d_L = \frac{c}{H_0} z(1+z) \tag{23}$$

for $z \leq z_{\mathrm{m},\Lambda}$, og

$$d_L = \frac{c}{a_{\mathrm{m},\Lambda} H_0} \left\{ 3t_{\mathrm{m},\Lambda} H_0 \left[1 + z - (1+z)^{1/2}(1+z_{\mathrm{m},\Lambda})^{1/2} \right] + \frac{(1+z)z_{\mathrm{m},\Lambda}}{1+z_{\mathrm{m},\Lambda}} \right\} \tag{24}$$

for $z > z_{\mathrm{m},\Lambda}$, hvor $1 + z_{\mathrm{m},\Lambda} = a_{\mathrm{m},\Lambda}^{-1}$.

(f) Vi antager at $H_0 = 70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ og $t_0 = 13.7 \times 10^9$ år. Bestem $(H_0/c)d_L$ for $z = 1$ og $z = 2$ for de to modeller, ved hjælp af ligning (15) og (24).

(g) Vi betragter en supernova af Type Ia med lysstyrke $4 \times 10^9 L_\odot$, hvor $L_\odot$ er Solens lysstyrke. Find den tilsyneladende bolometriske størrelsesklasse for denne supernova ved $z = 1$ og $z = 2$ i de to modeller. Solens absolutte bolometriske størrelsesklasse sættes til $M_{bol,\odot} = 4.75$.

OPGAVE 1

Vi betragter udviklingen af stjerner under den centrale brintforbrænding, fra alder-nul hovedserien (ZAMS) til brinten er stort set brugt op i centrum. Figuren næste side viser udvalgte udviklingsspor, for stjerner med masser i nærheden af 1 og 2.5 $M_\odot$, hvor $M_\odot$ er Solens masse. På figuren er markeret hvor det centrale brintindhold X_c er reduceret til 0.05. I denne opgave betragtes det som afslutningen på den centrale brintforbrænding. Det antages at stoffet i stjernerne opfylder idealgasloven. Den kemiske sammensætning på ZAMS antages givet ved et indhold X, Z af brint og tunge grundstoffer på henholdsvis 0.7 og 0.02.

(a) Forklar kort og kvalitativt hvorfor udviklingssporene har et forskelligt forløb i de to tilfælde. Hvorfor er der et 'hook' i sporene for de tungere stjerner?

(b) Giv et skøn, ud fra figuren, over forholdene L_f/L_0 og R_f/R_0 mellem overfladelysstyrke L_f og overfladeradius R_f ved afslutningen af den centrale brintforbrænding og de tilsvarende størrelser L_0 og R_0 på ZAMS, for $1M_\odot$ og $2.5M_\odot$.

Det er markant at radius øges væsentlig kraftigere for $2.5M_\odot$ stjernen end for $1M_\odot$ stjernen. I resten af opgaven prøver vi at give en approksimativ forklaring på denne opførsel. Denne er basert på meget forsimplede modeller, der ikke desto mindre indeholder væsentlige dele af den relevante fysik. Grundlaget er virialsætningen, der som bekendt relaterer stjernens dynamiske og termiske egenskaber, under forudsætning af hydrostatisk ligevægt. Vi skriver den som

$$\Omega = -2U \ , \tag{25}$$

hvor

$$\Omega = -\int_0^M \frac{GM_r \mathrm{d}M_r}{r} \tag{26}$$

er stjernens gravitationelle potentielle energi og U er stjernens termiske energi; i ligning (2) er G gravitationskonstanten, r afstanden til stjernens centrum, M_r massen inden for r og M er stjernens totale masse.

(c) Som et simpelt eksempel på anvendelsen af ligning (1) og (2) betragter vi en model med konstant massefylde, $\rho = \rho_0$ og konstant kemisk sammensætning. Vi definerer en middelværdi af temperaturen T som

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^M T \mathrm{d}M_r}{M} \ . \tag{27}$$

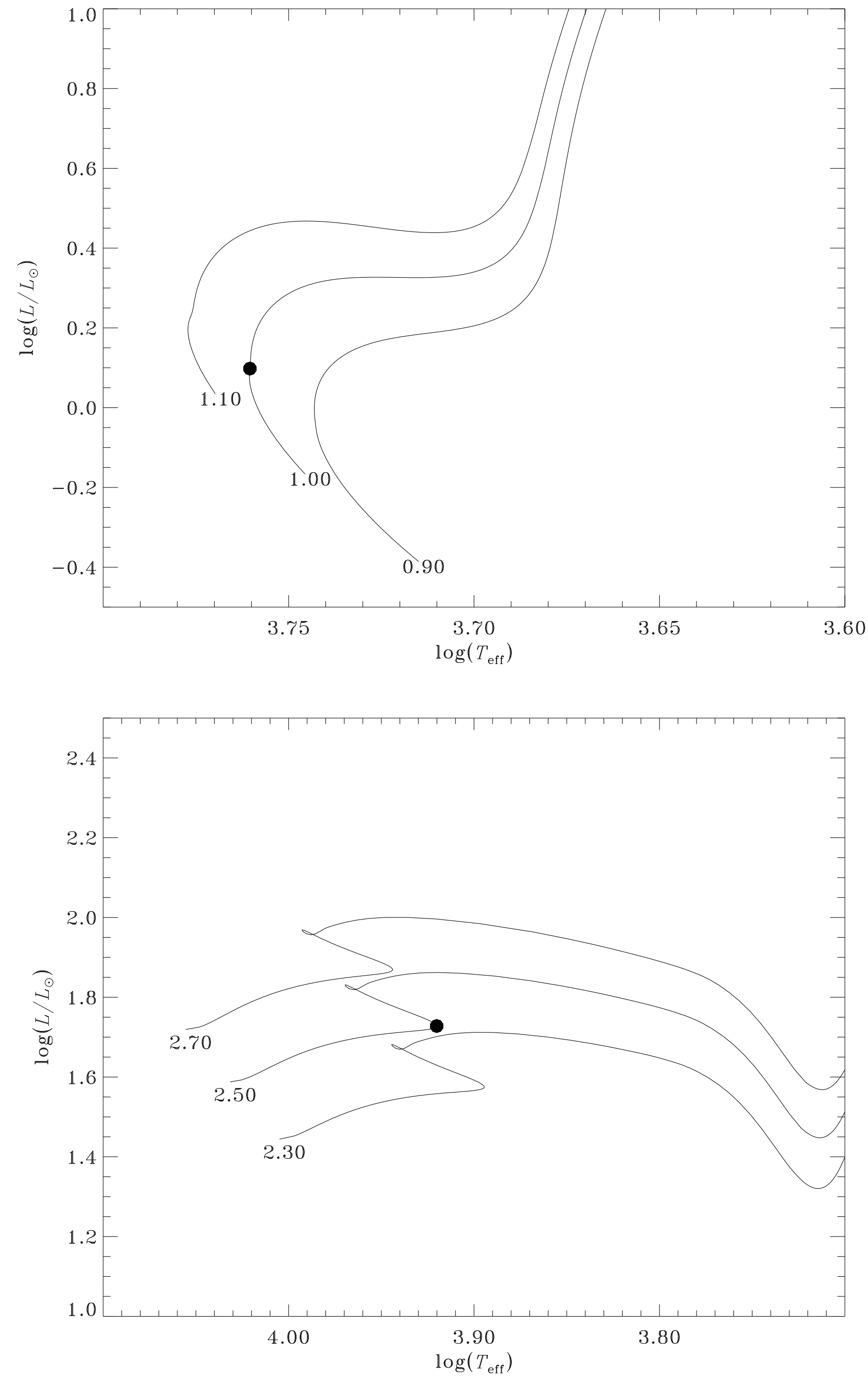


Figure 1: Udviklingsspor for udvalgte stjerner. Massen for hvert spor er angivet i enheder af solens mass $M_\odot$, og $T_{\rm eff}$ er i enheder af K. Den fyldte cirkel på sporene for $1M_\odot$ og $2.5M_\odot$ markerer hvad vi her betragter som afslutningen på den centrale brintforbrænding.

Vis ud fra ligning (2) at for denne model er

$$\Omega = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \tag{28}$$

og benyt dernæst ligning (1) til at vise at

$$\langle T \rangle = \frac{1}{5}\frac{GM\mu m_{\rm u}}{kR} \ , \tag{29}$$

hvor μ er middelmolekylvægten, $m_{\rm u}$ er massen af et brintatom, k er Boltzmanns konstant og R er stjernens overfladeradius.

Vi betragter nu en mere kompliceret model, med

$$\rho = \begin{cases} \rho_{\rm c} & \text{for} \quad M_r \leq M_{\rm c} \\ \rho_{\rm e} & \text{for} \quad M_r > M_{\rm c} \ , \end{cases} \tag{30}$$

hvor $\rho_{\rm c}$ og $\rho_{\rm e}$ er konstanter, men generelt ændrer sig under stjernens udvikling. $M_{\rm c}$ antages at være uændret under stjernens udvikling; derimod ændres den tilsvarende afstand $r_{\rm c}$ til stjernens centrum sig generelt.
Man kan vise at for denne model er den gravitationelle potentielle energi approksimativt givet ved

$$\Omega \simeq -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\left(\frac{q_{\rm c}^2}{x_{\rm c}} + q_{\rm e}^2 + \frac{5}{2}q_{\rm c}q_{\rm e}\right) \ . \tag{31}$$

hvis $r_{\rm c} \ll R$; her er $x_{\rm c} = r_{\rm c}/R$, $q_{\rm c} = M_{\rm c}/M$ og $q_{\rm e} = 1 - q_{\rm c}$. I det følgende antager vi at vi kan benytte dette udtryk, som ikke skal eftervises.
Vi betragter nu udviklingen af stjernen fra ZAMS til afslutningen af den centrale brintforbrænding. I første omgang antager vi at det gennemsnitlige tryk og den gennemsnitlige temperatur er uændret i den centrale del af stjernen, for $M_r \leq M_{\rm c}$. Vi antager også, noget urealistisk, at brintindholdet reduceres i samme takt overalt inden for $M_{\rm c}$, så $X = X_{\rm c}$ i dette område og $\mu = \mu_{\rm c}$, den centrale værdi af middelmolekylvægten.

(d) Argumenter for at så gælder at

$$r_{\rm c}^3\mu_{\rm c} = \text{konstant} \tag{32}$$

under stjernens udvikling, og bestem forholdet $r_{\rm c,f}/r_{\rm c,0}$ mellem $r_{\rm c,f} = r_{\rm c}$ ved afslutningen af brintforbrændingen og $r_{\rm c,0} = r_{\rm c}$ på ZAMS.

Vi betragter nu udviklingen i stjernens lysstyrke og temperatur. Specielt tillader vi en variation i stjernens indre temperatur, men opretholder antagelsen om at denne er for lille til at påvirke trykket. Vi antager at stjernens energiproduktionshastighed per masse udelukkende afhænger af temperaturen, som

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^n \ , \tag{33}$$

bvor ϵ_0 og eksponenten n er konstanter for en given stjerne og T_0 er en passende reference-temperatur (vi negligerer altså, lidt urealistisk, afhængigheden af massefylde og kemisk sammensætning). Vi antager desuden at middeltemperaturen $\langle T \rangle$, defineret i ligning (27), karakteriserer udviklingen i stjernens temperatur, så vi kan skrive

$$T(M_r) = \langle T \rangle \Theta(M_r) \ , \tag{34}$$

hvor funktionen $\Theta(M_r)$ er uændret under stjernens udvikling.

(e) Vis at stjernens overfladelysstyrke tilfredsstiller

$$L \propto \langle T \rangle^n \ , \tag{35}$$

under stjernens udvikling.

(f) Ud fra virialsætningen antager vi, som i spørgsmål (c), at $\langle T \rangle \propto |\Omega|$ under stjernens udvikling. Vis, ud fra ligning (31) og (35) at forholdet R_f/R_0 kan skønnes som

$$\frac{R_\mathrm{f}}{R_0} = \left\{ \left(q_\mathrm{e}^2 + \frac{5}{2} q_\mathrm{c} q_\mathrm{e} \right) \left(\frac{L_\mathrm{f}}{L_0} \right)^{1/n} - \frac{R_0}{r_{\mathrm{c},0}} q_\mathrm{c}^2 \left[\frac{r_{\mathrm{c},0}}{r_{\mathrm{c,f}}} - \left(\frac{L_\mathrm{f}}{L_0} \right)^{1/n} \right] \right\}^{-1} \left(q_\mathrm{e}^2 + \frac{5}{2} q_\mathrm{c} q_\mathrm{e} \right) \ . \tag{36}$$

(g) I spørgsmål (b) har vi skønnet over L_f/L_0 for $1 M_\odot$ og $2.5 M_\odot$ stjernerne. Brug resultatet i spørgsmål (f) til at bestemme det tilsvarende skøn over R_f/R_0; antag at $q_\mathrm{c} = 0.4$ og $r_{\mathrm{c},0}/R_0 = 0.1$ og anvend $n = 4$ for $1 M_\odot$ stjernen og $n = 20$ for $2.5 M_\odot$ stjernen. (De forskellige værdier for n skyldes at energiproduktionen domineres af PP kæderne og CNO cyklen i henholdsvis $1 M_\odot$ og $2.5 M_\odot$ stjernen.) Bemærk at modellen er ret grov; vi kan derfor ikke forvente at resultatet stemmer helt med de værdier for R_f/R_0 vi fandt i spørgsmål (b).

OPGAVE 2

I denne opgave antager vi et fladt stof-domineret Univers, med $\Omega_m = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$ (bemærk at Ω har en anden betydning end i Opgave 1). Den nuværende Hubble-konstant H_0 sættes til $70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.
Vi betragter en kvasar og en nærtliggende lysende sky af brintgas. For kvasaren er målt en bølgelængde for Lyman-α linien i brint på 4912.52 Å, mens linien har en bølgelængde på 4922.25 Å i brintskyen. Det opgives at hvilebølgelængden for Lyman-α linien er 1215.67 Å.

(a) Bestem rødforskydningen z_{Q} og z_{G} for Lyman-α linien i kvasaren og brintskyen.

(b) Find egenafstanden[1] $d_{\mathrm{p}}(t_0)$ til det nuværende tidspunkt til kvasaren og brintskyen hvis det antages at rødforskydningen alene skyldes Universets udvidelse. Resultatet opgives i Mpc.

I virkeligheden antager man at brintskyen og kvasaren er fysisk forbundne, og at forskellen i rødforskydning skyldes at brintskyen falder ind mod den galakse, som kvasaren ligger i. Skyens hastighed v_{G} i synsliniens retning, relativt til kvasaren, giver anledning til en Doppler-forskydning som bidrager til rødforskydningen.

(c) Bestem v_{G} ud fra de fundne rødforskydninger, hvis det antages at brintskyen og kvasaren har samme egenafstand.

(d) Skyen er en del af et større område af gas med en typisk vinkeludstrækning fra kvasaren på 20"; vi antager at området kan approksimeres med en kugle med centrum i kvasaren. Bestem den fysiske radius r_{G}, opgivet i kpc, af området på det tidspunkt hvor lyset blev udsendt.

(e) Vis at et groft skøn over massen M_{gal} af den galakse, kvasaren ligger i, kan bestemmes som

$$M_{\mathrm{gal}} \simeq \frac{v_{\mathrm{G}}^2 r_{\mathrm{G}}}{G} \, , \tag{37}$$

og bestem M_{gal} (i enheder af solmasser) ud fra de fundne talværdier.

[1] *proper distance* i Ryden