

Opgave 1 – 7 skulle gerne give en fornemmelse af nogle interessante og relevante størrelsesforhold. Ikke angivne enheder og fysiske størrelser kan i tabellen på side 2 – 3 i *Opgavesamling til A4 Astrofysik I*, eller i Appendix C i *Fundamental Astronomy*. Bemærk at vi i opgaverne generelt anvender cgs enheder, mens *Fundamental Astronomy*, i overstemmelse med Grundloven og Rom-traktaten, anvender SI enheder. En lille oversættelsestabel er givet sidst i dette opgavesæt.

### Opgave 1

Hvad er Solens middelmassefylde?

Hvordan kan den fundne værdi forenes med antagelsen om at stoffet i Solen er luftformigt?

### Opgave 2

Hvad er Solens energiproduktion pr. masseenhed?

Prøv at sammenligne Solens effektivitet, nået på denne måde, med f.eks. en bilmotor. (1 hestekraft = 735.5 W; 1 W =  $10^7$  erg/sec). Sammenlign også med energiomsætningen i et menneske, baseret på et skønnet dagligt kalorieindtag.

Hvor længe ville det tage at øge temperaturen af stoffet i Solen med 1 K ved denne energiproduktion; antag at varmfylden er  $10^8$  erg/(gK).

Antag omvendt at Solen ikke har nogen indre energi-produktion. Hvis middeltemperaturen af stoffet i Solen antages at være  $10^6$  K, hvor længe kunne Solen så lyse med sin nuværende lysstyrke?

Overvej samme spørgsmål for en hvid dværg med masse  $0.6M_{\odot}$ , radius  $10^4$  km og effektiv temperatur  $T_{\text{eff}} = 10^4$  K; antag samme varmfylde og middeltemperatur som for Solen. Sammenhængen mellem lysstyrke, radius og effektiv temperatur antages givet ved Karttunen et al. ligning (5.19).

### Opgave 3

Normalt kan stjerner antages at være i *hydrostatisk ligevægt*, dvs. i balance mellem trykgradienten og tyngdekraften. Hvis denne balance forstyrres vil stjernens egenskaber ændre sig på en karakteristisk *dynamisk tidsskala*  $t_{\text{dyn}}$ . Et simpelt skøn over  $t_{\text{dyn}}$  kan fås ved at betragte tidsskalaen for et frit fald i tyngdefeltet på stjernens overflade over en karakteristisk afstand, givet stjernens masse  $M$  og radius  $R$ . Antag en afstand  $R/2$  og (lidt urealistisk) at tyngdeaccelerationen er konstant over denne afstand og vis at

$$t_{\text{dyn}} \simeq \left( \frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} .$$

Hvad er  $t_{\text{dyn}}$  for Solen?

Betragt et objekt i en cirkulær bane med radius  $R$  omkring en masse  $M$ . Vis at baneperioden er

$$\Pi_{\text{orb}} = 2\pi t_{\text{dyn}} ,$$

hvor  $t_{\text{dyn}}$  er givet ved ovenstående udtryk.

Man har observeret at mange stjerners lysstyrke varierer. Vi antager at perioden af variationen er givet ved den dynamiske tidsskala  $t_{\text{dyn}}$ .

Nogle stjerner har perioder på 1 år; vi antager at de har masse  $1M_{\odot}$ . Hvad er disse stjerners radius? Sammenlign med Solens radius og med radius af jordbanen.

Hvad er perioden for en hvid dværg, med parametre som givet i opgave 2? Find også perioden af en neutronstjerne, med masse  $1.4M_{\odot}$  og radius 10 km.

#### Opgave 4

For yderligere at begrunde definitionen af  $t_{\text{dyn}}$  betragter vi kollapset af en stjerne, hvor trykket pludselig fjernes. Generalisér udledningen af Karttunen et al. ligning (10.1) til tilfældet hvor der ikke er ligevægt og vis at det resulterer i bevægelsesligningen

$$\rho \frac{d^2 r}{dt^2} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} - \frac{dP}{dr} , \quad (4.1)$$

hvor vi fortsat antager sfærisk symmetri. Løs denne ligning med  $P = 0$  og  $M_r = M$ , og med begyndelsesbetingelserne  $r = R$ ,  $dr/dt = 0$  for  $t = 0$ . Hvor lang tid tager det før radius er reduceret til det halve? Hvor lang tid tager det fuldstændige kollaps? Udtryk disse tider ved  $t_{\text{dyn}}$ .

*Hint:* Vis, ved at multiplicere ligning (4.1) med  $dr/dt$  og integrere, at

$$\frac{dr}{dt} = - \left[ 2GM(r^{-1} - R^{-1}) \right]^{1/2} .$$

Ved integrationen af denne ligning er det bekvemt at substituere  $r = R \cos^2 u$ .

#### Opgave 5

Ifølge ækvivalensen mellem masse og energi,  $E = mc^2$ , må Solens energiudstråling være ledsaget af et massetab.

Beregn det årlige massetab.

Hvad er den øvre grænse for Solens levetid, hvis energiudstrålingen antages at være konstant?

#### Opgave 6

Vi approximerer Mælkevejssystemet med en cirkulær skive med diameter 25 kpc, tykkelse 2 kpc og masse  $10^{11} M_{\odot}$ .

Hvad er den gennemsnitlige tæthed af stjerner, hvis disse alle antages at have massen  $1 M_{\odot}$ ? Giv også et skøn over den gennemsnitlige afstand mellem stjernerne.

Hvad ville den gennemsnitlige massefylde være, hvis stoffet var jævnt fordelt?

Antag at stoffet i Mælkevejssystemet overvejende består af H. Hvad er det gennemsnitlige antal brintatomer pr  $\text{cm}^3$ ?

### Opgave 7

Ud fra observationer kan man skønne, at den gennemsnitlige energiproduktion pr rumfangsenhed i Universet er  $3 \times 10^8 L_\odot/\text{Mpc}^3$ . Antag at en typisk værdi for forholdet mellem lysstyrke og masse er  $L/M = 0.1 L_\odot/M_\odot$ .

Hvad er Universets middeltæthed af *lysende stof*?

Hvis stoffet er jævnt fordelt, hvad ville så den gennemsnitlige afstand mellem atomerne være?

---

### Oversættelser:

Fra Ångström til cm:	$1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$
Fra barn til $\text{cm}^2$ :	$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$
Fra N til dyn:	$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn}$
Fra J til erg:	$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$
Fra eV til erg:	$1 \text{ eV} = 1.60217733 \times 10^{-12} \text{ erg}$
Fra $\text{N m}^{-2}$ til $\text{dyn cm}^{-2}$ :	$1 \text{ N m}^{-2} = 10 \text{ dyn cm}^{-2}$
Fra atmosfærer til $\text{dyn cm}^{-2}$ :	$1 \text{ atm} = 1.01325 \times 10^6 \text{ dyn cm}^{-2}$
År:	$1 \text{ år} = 3.155815 \times 10^7 \text{ sec}$
Astronomisk enhed:	$1 \text{ AU} = 1.49598 \times 10^{13} \text{ cm}$
Parsec:	$1 \text{ pc} = 3.08568 \times 10^{18} \text{ cm}$
Lysår:	$1 \text{ ly} = 9.46053 \times 10^{17} \text{ cm}$ $= 0.3066 \text{ pc}$