Opgave 8: Virialsætningen

Virialsætningen er fundamental for forståelsen af mange aspekter af stjerners udvikling, ikke mindst stjernedannelse, og det er derfor interessant at udlede den i en form, der er direkte relateret til de sædvanlige størrelser der beskriver stjernernes struktur.

i) Vis at den gravitationalle potentielle energi for en stjerne, med et passende nulpunkt, kan fås som

$$\Omega = -\int_0^R 4\pi\rho r G M_r \mathrm{d}r \ . \tag{8.1}$$

ii) Vis, ved hjælp af ligningen for hydrostatisk ligevægt (Karttunen et al., ligning 10.1), at dette kan skrives

$$\Omega = -3\int_0^R 4\pi r^2 P \mathrm{d}r \ , \tag{8.2}$$

hvis det antages at $P(R) = 0$.

iii) Betragt en ikke-relativistisk mono-atomisk ideal gas, og vis ud fra ligning (8.2) at

$$\Omega = -2U \ , \tag{8.3}$$

hvor U er den totale indre energi af gassen i stjernen.

iv) Vis ud fra ligning (8.3) at stjernens totale energi er $E = 1/2\Omega$.

v) Betragt en stjerne, der trækker sig sammen under frigivelse af gravitationel potentiel energi, men uden bidrag fra kernereaktioner til lysstyrken. Vis at stjernens lysstyrke er givet ved

$$L = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \ . \tag{8.4}$$

vi) Vi ser nu paa det ekstremt relativistiske tilfælde (f.eks. hvor trykket i stjernen er domineret af strålingstryk.) Vis ud fra ligning (8.2) at i dette tilfælde er

$$\Omega = -U \ . \tag{8.5}$$

Hvad er stjernens totale energi? Kan det give problemer for stjernen?

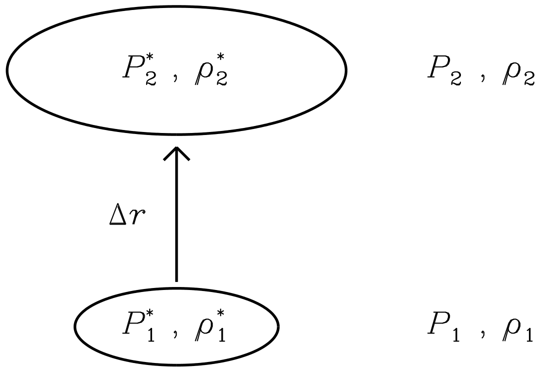

Fig. 9.1. Bevægelsen af et konvektivt element, fra en begyndelsesposition indikeret med "1" til en senere position indikeret med "2".

Opgave 9: Konvektiv ustabilitet

Forekomsten af konvektion er af afgørende betydning for struktur og udvikling af stjerner. I denne opgave udleder vi betingelsen for konvektiv ustabilitet.
Vi betragter bevægelsen af et lille gaselement (se Fig. 9.1), der bevæges en lille afstand Δr i radial retning. Tryk og massefylde indenfor (udenfor) elementet i begyndelsestilstanden er P_1^* og ρ_1^* (P_1 og ρ_1), og i sluttilstanden er de tilsvarende størrelser P_2^* og ρ_2^* (P_2 og ρ_2). Vi går ud fra at i begyndelsessituationen er $P_1^* = P_1$, $\rho_1^* = \rho_1$.

i) Argumenter at laget er ustabilt hvis $\rho_2^* < \rho_2$.

Vi antager at bevægelsen er så langsom at der er trykligevægt, således at også $P_2^* = P_2$ (man kan vise at det kræver at hastigheden er meget mindre end lydhastigheden). Endvidere antages det at forholdene inde i elementet ændrer sig adiabatisk, så $P \propto \rho^\gamma$.

ii) Vis at

$$\Delta\rho \equiv \rho_2^* - \rho_2 \simeq \left(\frac{\rho_1}{P_1} \frac{1}{\gamma} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} - \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r} \right) \Delta r \ , \tag{9.1}$$

hvor $P(r)$, $\rho(r)$ angiver forholdene i modellen, uden for elementet.

iii) Vis at ustabilitetsbetingelsen, $\Delta\rho < 0$, kan udtrykkes

$$\frac{\mathrm{d}\ln\rho}{\mathrm{d}\ln P} < \frac{1}{\gamma} \ . \tag{9.2}$$

iv) Da ligningen for strålingstransport er udtrykt ved temperaturgradienten er det bekvemt at udtrykke ustabilitetsbetingensen ved T og P. Vi antager idealgasloven, og ser bort fra variationer i middelmolekulvægten μ. Vis at ligning (9.2) kan udtrykkes ved

$$\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln P} > 1 - \frac{1}{\gamma} \equiv \nabla_{\mathrm{ad}} \ . \tag{9.3}$$

Størrelsen $\mathrm{d}\ln T/\mathrm{d}\ln P$ benævnes konventionelt ∇.
Ved beregningen af stjernemodeller må man i et hvert punkt checke om denne ustabilitetsbetingelse er opfyldt, hvis energitransporten antages at ske ved stråling. Hvis det er tilfældet vil (en væsentlig del) af energitransporten ske ved konvektive gasbevægelser.

v) Vis ud fra ligningerne for hydrostatisk ligevægt og strålingstransport at hvis der er strålingstransport er

$$\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln P} = \nabla_{\mathrm{rad}} \equiv \frac{3}{16\pi acG}\frac{\kappa P}{T^4}\frac{L_r}{M_r} \ . \tag{9.4}$$

Betingelsen for konvektiv ustabilitet er altså at

$$\nabla_{\mathrm{rad}} > \nabla_{\mathrm{ad}} \ . \tag{9.5}$$

Det kan, i følge ligning (9.4), ske hvis κ er stor eller L_r/M_r er stor. En høj opacitet har man typisk ved relativt lave temperaturer, og det fører til konvektion i de ydre dele af lette (eller på anden måde kolde) stjerner. En høj værdi af L_r/M_r fås i den centrale dele af stjernen, hvis energiproduktionen er kraftigt koncentreret omkring centrum. Det sker hvis energiproduktionen er meget temperaturafhængig, som tilfældet f.eks. er for CNO cycklen. Forekomsten af konvektive områder er resumeret på Karttunen et al., Fig. 11.3.
Hvis der er konvektiv energitransport må Karttunen et al. ligning (10.4) erstattes med en bestemmelse af den temperaturgradient, der er påkrævet for at sikre energitransporten ved konvektion. Som beskrevet af Karttunen et al. fører det i det meste af en stjerne til en meget nær adiabatisk temperaturgradient (se ligning 10.7).

Opgave 10: Neutrinoer fra Solen
Giv et skøn over det totale antal neutrinoer produceret i Solen per sekund, og fluksen af neutrinoer på Jorden (dvs. antallet af neutrinoer per cm^2 per sekund).
Antag at tværsnittet for en reaktion mellem en neutrino og en atomkerne er $10^{-46}\,\mathrm{cm}^2$; giv et skøn over antallet af neutrinoreaktioner per år i en typisk Astrofysik-student. (Det opgives at den effektive energiproduktion ved dannelsen af et ^{4}He atom er 25 MeV.)