Opgave 11: Kernereaktioners temperatur-afhængighed

Stjernernes struktur afhænger kraftigt af kernereaktionernes afhængighed af temperaturen. I denne opgave prøver vi at give en fornemmelse for denne temperaturafhængighed
Som argumenteret ved forelæsningerne styres sandsynligheden af en kernereaktion i høj grad af nødvendigheden af at gennemtrænge en potentialbarriere, der er meget højere end kernernes gennemsnitlige termiske energi. Tværsnittet for en reaktion, som funktion af energien E, kan derfor skrives som

$$\sigma(E) = S(E) E^{-1} \exp(-bE^{-1/2}) \; . \tag{11.1}$$

Her beskriver *tværsnitsfaktoren* $S(E)$ detaljerne i kerneprocesserne når potentialbarrieren er gennemtrængt; den kan bestemmes, som en generelt langsomt varierende funktion af E, ud fra analyse af eksperimentelle målinger af tværsnittet ved hjælp af ligning (11.1). Faktoren E^{-1} kommer fra den geometriske effekt af kernernes endelige de Broglie bølgelængde λ_{B}, der giver et 'areal' proportionalt med $\lambda_{\mathrm{B}}^2 \propto p^{-2} \propto E^{-1}$, hvor p er kernernes indbyrdes impuls. Endelig kommer faktoren $\exp(-bE^{-1/2})$ fra en kvantemekanisk beregning af sandsynligheden for gennemtrængning af Coulomb-barrieren; her er

$$b = 31.291 \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \mathcal{A}^{1/2} \, \mathrm{keV}^{1/2} \; , \tag{11.2}$$

hvor $\mathcal{Z}_1$ og $\mathcal{Z}_2$ er kerneladningerne af de to kerner, der indgår i reaktionen, og $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 / (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)$ er den reducerede masse (i enheder af atommasseenheden) af de to kerner, hvor $\mathcal{A}_1$ og $\mathcal{A}_2$ er masserne af de to kerner.
Det samlede antal reaktioner r_{12} per volumenenhed afhænger både af tværsnittet og energifordelingen af kernerne. Energifordelingen er givet ved en Maxwell-Boltzmann fordeling og dermed proportional med $\exp(-E/kT)$. Man kan vise at resultatet er at

$$r_{12} \propto T^{-3/2} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{E^{1/2}}\right) \mathrm{d}E \; . \tag{11.3}$$

Reaktionshastigheden er altså et integral af tværsnitsfaktoren vægtet med

$$g(E) = e^{-bE^{-1/2}} e^{-E/kT} \; ; \tag{11.4}$$

denne funktion, der kaldes *Gamow-toppen*, er illustreret i Fig. 11.1.

i) Vis at g har et maximum ved $E = E_0 = (bkT/2)^{2/3}$.

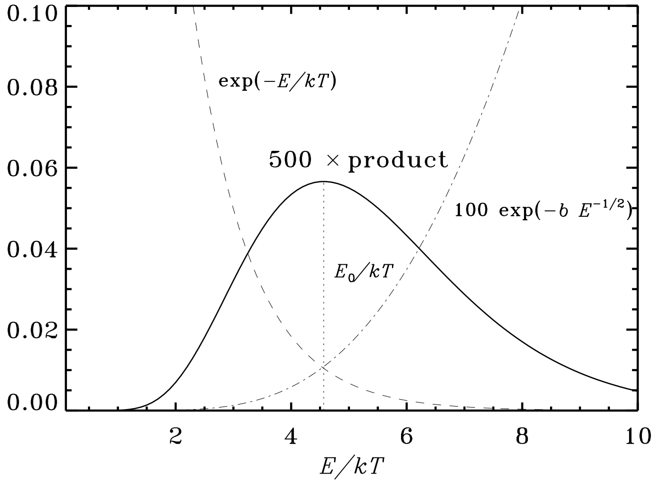

Fig. 11.1. Gamow-toppen (se ligning 11.4), der vægter tværsnitsfaktoren i beregningen af kernereaktionsraten, for reaktionen ^{1}H+^{1}H ved en temperatur på 15×10^6 K. Bemærk at maximum er ved en væsentlig højere energi en kernernes middelenergi $3/2kT$.

Da toppen er relativt smal, og S varierer langsomt med E, kan $S(E)$ approksimeres med $S(E_0)$ og tages uden for integralet. Selv med denne approksimation kan integralet ikke udregnes analytisk. Den sædvanlige måde at skønne over værdien af integralet er at approksimere $g(E)$ med en Gaussfunktion nær $E = E_0$,

$$g(E) \simeq g(E_0) \exp \left[- \left(\frac{E - E_0}{\Delta/2} \right)^2 \right] ,$$

hvor bredden Δ er valgt sådan at approksimationen har samme anden afledede som $g(E)$ for $E = E_0$.

ii) Vis at dette giver $\Delta \propto T^{5/6}$.

iii) Argumenter for at

$$\int_0^\infty g(E) \mathrm{d}E \propto \Delta\, g(E_0) .$$

iv) Argumenter herudfra for at temperaturafhængigheden af r_{12} kan beskrives ved

$$r_{12} \propto T_6^{-2/3} \exp(-B T_6^{-1/3}) , \tag{11.5}$$

hvor $T_6 = T/(10^6\,\mathrm{K})$ og

$$B = 42.487 (Z_1^2 Z_2^2 \mathcal{A})^{1/3} . \tag{11.6}$$

v) Det er ofte bekvemt at approksimere temperatur-afhængigheden med en potenslov. Antag at r_{12} tilfredsstiller ligning (11.5) og approksimer dette udtryk med

$$r_{12} \propto T^n \ .$$

Bestem eksponenten n som funktion af T_6, og udregn værdierne for reaktionerne ${}^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H}$ og ${}^1\mathrm{H} + {}^{14}\mathrm{N}$ for $T = 15 \times 10^6\,\mathrm{K}$.

Opgave 12: Skøn over tryk og temperatur i en stjerne

Simple skøn over forholdene i det indre af stjerner giver en god forståelse for hvordan disse egenskaber afhænger af stjernens globale parametre som masse, radius og kemiske sammensætning. Formålet er helt oplagt ikke at bestemme præcise værdier, men snarere at finde størrelsesordner og bestemme, hvordan disse ændrer sig med stjernens parametre. Derfor negligerer vi rask væk størrelser af størrelsesordenen 1, som π etc.

i) Argumenter for at en typisk værdi for massefylden i stjernens indre er M/R^3.

ii) Argumenter for at $|\mathrm{d}P/\mathrm{d}r|$ i ligningen for hydrostatisk ligevægt kan approksimeres med P_c/R, hvor P_c er det centrale tryk, og at tyngdeaccelerationen kan approksimeres med GM/R^2. Vis herudfra at et skøn over stjernens centrale tryk er

$$P_\mathrm{c} \simeq \frac{GM^2}{R^4} \ . \tag{12.1}$$

iii) Brug de tidligere skøn, og idealgasloven, til at finde følgende skøn for stjernens centrale temperatur:

$$T_\mathrm{c} \simeq \frac{G\mu m_H M}{kR} \ , \qquad (12.2$$

hvor vi antager at strålingstryk og effekter af degeneration kan negligeres.

iv) Bestem herudfra forholdet P_rad/P og argumenter for at strålingstrykket er vigtigt i tunge stjerner.

v) Diskuter i lyset af Opgave 8, spørgsmål (vi), om det kan give problemer for stjernen.

Opgave 13: Skøn over stjerners lysstyrke

Vi kan benytte skønnene i ligning (12.1) og (12.2) over typiske værdier for tryk og temperatur i en stjerne til at skønne over stjernernes lysstyrke. Som sædvanlig er hovedformålet med skønnene at få en ide om, hvordan lysstyrken afhænger af stjernens øvrige parametre.

i) Argumenter ud fra Karttunen et al., ligning (10.4), for at en stjernes lysstyrke kan skønnes som

$$L \simeq \frac{Rac}{\kappa\rho} T^4 \ , \tag{13.1}$$

hvor typiske værdier for ρ, κ, og T benyttes.

ii) Vi antager nu at opaciteten er domineret af atomare processer, der kan approksimeres med Kramers' udtryk; et passende udtryk under de relevante forhold er

$$\kappa_{\rm atom} \simeq 4 \times 10^{25} Z(1+X)\rho T^{-3.5} \qquad \text{i cgs enheder} \ . \tag{13.2}$$

Brug skønnene i ligning (12.1) og (12.2), samt $\rho \simeq M/R^3$ og vis at

$$L \propto M^{5.5} R^{-0.5} \mu^{7.5} \ ; \tag{13.3}$$

find også værdien af skønnet for $M = 1M_\odot$, $R = 1R_\odot$, $X = 0.7$, $Z = 0.02$ og sammenlign med Solens faktiske lysstyrke.

iii) Antag i stedet at opaciteten er domineret af elektronspredning,

$$\kappa_{\rm e} = 0.2(1+X)\,{\rm cm}^2\,{\rm g}^{-1} \ , \tag{13.4}$$

og vis at i dette tilfælde er

$$L \propto M^3 \mu^4 \ ; \tag{13.5}$$

find igen værdien af skønnet for M, R, X og Z som givet i spørgsmål (ii).

iv) Argumenter for at ligning (13.2) er relevant for relativt lette, og ligning (13.4) for relativt tunge, stjerner. Diskuter også effekten, under en stjernes udvikling, af afhængigheden af μ.